Cvičení 3

Nejprve se vrátíme k abstraktním definicím z počátku semestru a zopakujeme, co je to lineární prostor.

Definice. Lineární prostor je čtveřice $(L, T, +, \cdot)$, kde $L \neq \emptyset$ je nějaká množina, jejíž prvky nazýváme **vektory**, T je těleso, $+$ a $\cdot$ jsou operace $+\colon L \times L \to L$, $\cdot\colon T \times L \to L$ takové, že platí

1. $(\exists \vec{o} \in L)\ (\forall \vec{x} \in L)\ \vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$,
2. $(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L)\ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$,
3. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in L)\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,
4. $(\forall \vec{x} \in L)\ (\exists y \in L)\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$,
5. $(\forall \vec{x} \in L)\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$,
6. $(\forall \alpha, \beta \in T)\ (\forall \vec{x} \in L)\ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$,
7. $(\forall \alpha, \beta \in T)\ (\forall \vec{x} \in L)\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
8. $(\forall \alpha \in T)\ (\forall \vec{x}, \vec{y} \in L)\ \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$.

Cvičení 3.1. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

a) $\mathbb{C}$,

b) $\mathbb{C}^n$,

c) $\mathbb{C}[x]$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$,

e) $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$,

f) $\mathbb{Q}^n$,

Cvičení 3.2. Rozmyslete si, že následující množiny rovněž tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

a) Množina všech posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$ se sčítáním a násobením „po prvcích".
b) Množina všech funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sčítáním a násobením „po bodech".

Teď zpět k pojmům z posledních přednášek. Dnešní cíl bude především porozumět pojmu dimenze.

Definice. Seznam vektorů $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ nazveme **lineárně nezávislý**, jestliže rovnost $\alpha_1 \vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{o}$ implikuje $\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0$. V opačném případě je tento seznam **lineárně závislý**.

Uvažujme nyní následující dva seznamy vektorů (z posledního domácího úkolu):

$$\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3), \qquad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.3. Rozhodněte, zda je seznam $\mathscr{X}$ resp. $\mathscr{Y}$ lineárně nezávislý.

Definice. Seznam vektorů $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ **generuje** podprostor $V \subset L$, jestliže $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$.

Cvičení 3.4. Rozhodněte zda seznam $\mathscr{X}$ resp. $\mathscr{Y}$ generuje $\mathbb{R}^3$.

Definice. Báze lineárního prostoru L je libovolná lineárně nezávislá generující množina (tj. množina, která generuje celý prostor L).

Cvičení 3.5. Rozhodněte, zda $\mathscr{X}$, resp. $\mathscr{Y}$ je báze $\mathbb{R}^3$.

Definice. Dimenze lineárního prostoru L je velikost jeho (jakékoliv) báze. Existuje-li v L lineárně nezávislá množina velikosti n pro každé $n \in \mathbb{N}$, řekneme, že L má dimenzi **nekonečno**.

Tvrzení. Každá báze lineárního prostoru L má stejnou velikost. Uvedená definice tedy dává smysl.

Tvrzení. Nechť je dimenze lineárního prostoru L konečná, tj. $n \colon= \dim L < \infty$. Potom je každá lineárně nezávislá množina velikosti n generující (a tedy báze). Rovněž každá generující množina velikosti n je automaticky lineárně nezávislá (a tedy báze).

Cvičení 3.6. Ukažte, že $\mathscr{Y}$ je generující, tj. $W = \mathbb{R}^3$ s pomocí výše uvedeného tvrzení.

Řešení

1. ano, ano, ano, ne, ano, ne
3. $\mathscr{X}$ ne, $\mathscr{Y}$ ano
4. $\mathscr{X}$ ne, $\mathscr{Y}$ ano
5. $\mathscr{X}$ ne, $\mathscr{Y}$ ano