Cvičení 4

Definice. Buď L lineární prostor nad T a nechť $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je jeho (uspořádaná) báze. Pro libovolný prvek $\vec{v} \in L$ definujeme jeho **souřadnicový vektor** v bázi $\mathscr{X}$ jako

$$\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n, \qquad \text{kde} \qquad \vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n.$$

Cvičení 4.1. Uvažujme lineární prostor polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, tj.

$$\mathbb{R}^{\leq 2}[x] = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Najděte souřadnice polynomu $p(x) = 2x^2 + 5x - 8$ v bázi

a) $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$,
b) $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, kde $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = 2x - 5$, $f_3(x) = -x^2 - x + 1$,

Cvičení 4.2. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$. Rozhodněte, zda je seznam $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$, kde

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \quad \vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \quad \vec{y}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_3$$

lineárně nezávislý v L. Určete souřadnice vektorů $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ v bázi $\mathscr{X}$. Jsou tyto souřadnicové vektory lineárně nezávislé?

Věta. (Výběr báze z generujícího seznamu) Buď $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ generující seznam v L nad T. Potom existuje podseznam $(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_n})$, jenž tvoří bázi L.

Cvičení 4.3. V $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ označme $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi V a určete dimenzi V.

Řešení

1. $\mathbf{coord}_{\mathscr{E}}\, p(x) = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{coord}_{\mathscr{F}}\, p(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. ano; $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

3. např. $\mathscr{X} := (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$,