Cvičení 5

Definice. Buďte V, W lineární prostory nad tělesem T. Zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ se nazývá **lineární**, jestliže je

- *aditivní*, tj. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)\ \mathbf{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})$ a
- *homogenní*, tj. $(\forall \alpha \in T)\ (\forall \vec{x} \in V)\ \mathbf{f}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x})$.

Finta. Stačí ověřit, že pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $\mathbf{f}(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})$.

Cvičení 5.1. Určete, které z následujících zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární.

a) $\mathbf{f}\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$ b) $\mathbf{f}\binom{x}{y} = \binom{x^2}{y}$ c) $\mathbf{f}\binom{x}{y} = \binom{x+y}{y}$
d) $\mathbf{f}\binom{x}{y} = \binom{x+5}{y+2}$ e) $\mathbf{f}\binom{x}{y} = \binom{|x|}{|y|}$ f) $\mathbf{f}\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$

Poznámka. Ze střední školy znáte pojem *lineární funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což byla funkce daná předpisem $f(x) = ax + b$. Tyto funkce u nás *nebudeme považovat za lineární*, pokud neplatí $b = 0$.

Pozorování. Je-li $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V, pak je libovolné lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ jednoznačně určené svojí akcí na bázi $\mathbf{f}(\vec{x}_1), \ldots, \mathbf{f}(\vec{x}_n)$. Vskutku: chceme-li znát obraz libovolného $\vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n$, stačí spočítat $\mathbf{f}(\vec{y}) = \alpha_1\mathbf{f}(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\vec{x}_n)$.

Značení. Lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ budeme zapisovat ve tvaru **matice** $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\vec{e}_1 \cdots \mathbf{A}\vec{e}_s)$, kde $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$ je kanonická báze $\mathbb{R}^s$.

Cvičení 5.2. Určete matice lineárních zobrazení z předchozího cvičení.

Cvičení 5.3. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete, jak toto zobrazení působí na obecný vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Definice. Buď $\mathbf{f}\colon V \to W$ lineární zobrazení. Definujeme **jádro** tohoto zobrazení jako

$$\ker \mathbf{f} = \{\vec{x} \in V \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}\}.$$

Platí, že jádro je vždy lineární podprostor $\ker \mathbf{f} \subset V$. Dimenze jádra jako vektorové prostoru se nazývá **defekt** zobrazení $\mathbf{f}$; značíme $\operatorname{def} \mathbf{f} = \dim \ker \mathbf{f}$.

Cvičení 5.4. Najděte jádro a defekt zobrazení $\mathbf{A}$ z předchozího cvičení.

Definice. Buď $\mathbf{f}\colon V \to W$ lineární zobrazení. Definujeme **obraz** tohoto zobrazení jako

$$\operatorname{im} \mathbf{f} = \{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V\}.$$

Platí, že obraz je vždy lineární podprostor $\operatorname{im} \mathbf{f} \subset W$. Dimenze obrazu jako vektorového prostoru se nazývá **hodnost** zobrazení $\mathbf{f}$; značíme $\operatorname{rank} \mathbf{f} = \dim \operatorname{im} \mathbf{f}$.

Cvičení 5.5. Najděte hodnost a obraz zobrazení $\mathbf{A}$ z předchozích cvičení.

Řešení

1. ano, ne, ano, ne, ne, ano

2. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} x+2y-2z-u \\ 2x+4y+z+3u \\ -x-2y-u \end{pmatrix}$

4. $\ker \mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
$\operatorname{def} \mathbf{A} = 2$

5. $\operatorname{im} \mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
$\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$