Cvičení 6

Definice. Lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ se nazývá

- **monomorfismus**, jestliže je prosté, což platí právě tehdy když $\ker \mathbf{f} = \{\vec{o}\}$, což platí právě tehdy, když $\operatorname{def} \mathbf{f} = 0$
- **epimorfismus**, jestliže je na, tj. $\operatorname{im} \mathbf{f} = W$, což platí právě tehdy, když $\operatorname{rank} \mathbf{f} = \dim W$.
- **izomorfismus**, jestliže splňuje obě podmínky.

Cvičení 6.1. U následujících matic rozhodněte, zda jde o monomorfismus, epimorfismus nebo izomorfismus.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Pozorování. Pro matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ platí

- $\mathbf{A}$ je monomorfismus právě tehdy, když má lineárně nezávislé sloupečky (což může nastat jen tehdy, když $s \leq r$),
- $\mathbf{A}$ je epimofismus právě tehdy, když její sloupečky generují $\mathbb{R}^s$, (což může nastat jen tehdy, když $s \geq r$),
- $\mathbf{A}$ je izomorfismus právě tehdy, když její sloupečky tvoří bázi $\mathbb{R}^s$ (což může nastat jen tehdy, když $r = s$, tj. $\mathbf{A}$ je čtvercová matice).

Pozorování. Čtvercová matice je monomorfismus právě tehdy, když je epimorfismus.

Definice. Lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to V$ se nazývá **lineární operátor** na V.

Cvičení 6.2. Najděte inverzi matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

1. epi, mono, nic, izo
2. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$