Cvičení 7

Definice. Buďte V, W lineární prostory a $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r)$ resp. $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s)$ jejich báze. Pro libovolné lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ pak definuji jeho matici bázích $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$ jako

$$\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{Y}} = (\mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\,\mathbf{f}(\vec{x}_1) \cdots \mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\,\mathbf{f}(\vec{x}_s)).$$

Pozorování. Derivace je lineární zobrazení na lineárním prostoru všech funkcí. Můžeme také zavést derivaci jako lineární operátor $D\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, jenž zobrazuje

$$\mathbf{D}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + n\alpha_n x^n$$

Tento operátor rovněž můžeme zúžit na prostor polynomů stupně nejvýše n a dostat $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{\leq n}[x]$.

Cvičení 7.1. Najděte matici operátoru derivování $\mathbf{D}\colon R^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ ve standardní bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$.

Cvičení 7.2. Najděte hodnost a defekt operátoru derivování $\mathbf{D}\colon R^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Rozhodněte, zda se jedná o monomorfismus, epimorfismus či izomorfismus.

Cvičení 7.3. Najděte inverzi k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení 7.4. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jenž je ve standardní bázi dané maticí

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathscr{Y} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Najděte $\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{Y}}$.

Definice. Buď V lineární prostor a nechť $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ jsou jeho báze. Definujeme matici **transformace souřadnic** $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}} := \mathbf{E}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{Y}}$, kde $\mathbf{E}\colon V \to V$ je identické zobrazení. Tedy

$$\mathbf{T}_{\mathscr{X} \to \mathscr{Y}} = (\mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\,\vec{x}_1 \cdots \mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\,\vec{x}_n).$$

Cvičení 7.5. Najděte $\mathbf{T}_{\mathscr{E}_3 \mapsto \mathscr{Y}}$ a $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}_2}$, kde $\mathscr{E}_2$ a $\mathscr{E}_3$ jsou kanonické báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$ bereme z předchozího příkladu. Ověřte maticovým násobením, že platí $\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{Y}} = \mathbf{T}_{\mathscr{E}_3 \to \mathscr{Y}} \mathbf{f}_{\mathscr{E}_2}^{\mathscr{E}_3} \mathbf{T}_{\mathscr{X} \to \mathscr{E}_2}$.

Řešení

1. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\operatorname{rank} \mathbf{D} = 3$, $\operatorname{def} \mathbf{D} = 1$
3. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 17 & -10 & 8 \end{pmatrix}$
4. $\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{\mathscr{E}_3 \mapsto \mathscr{Y}} = \mathbf{A}^{-1}$