

Cvičení 8

Definice. Bijektivní zobrazení $\pi: M \rightarrow M$, kde M je konečná množina, nazýváme **permutace** množiny M . Množinu všech permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ značíme S_n .

Značení. Permutace lze zapisovat rozličnými způsoby. Pro ilustraci uvažme následující permutaci šesti prvků

$$\pi: 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 4, \quad 6 \mapsto 6.$$

Působení permutace se často zapisuje do tabulky následujícím způsobem

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Permutaci můžeme rovněž zapsat diagramaticky $\pi = \overline{13} \overline{21} \overline{45} |$.

Poznámka. (Pokud vím, následující se neprobírá na přednášce a není tedy potřeba umět u zkoušky.) Permutace se také dají zapisovat pomocí tzv. cyklů: $\pi = (132)(45)$ (např. cyklus (123) znamená zobrazení $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$) nebo jako složení transpozic $\pi = (23)(12)(45)$ (transpozice je cyklus délky dva, tj. prohození dvou prvků).

Cvičení 8.1. Zapište pomocí tabulky a pomocí diagramu permutaci $\sigma \in S_6$ zobrazující

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 6, \quad 4 \mapsto 4, \quad 5 \mapsto 1, \quad 6 \mapsto 5$$

Cvičení 8.2. Nalezněte inverzi obou permutací π a σ a jejich složení $\pi \circ \sigma$ a $\sigma \circ \pi$.

Definice. Pro $\pi \in S_n$ říkáme, že dvojice čísel (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$ tvoří **inverzi**, jestliže $\pi(i) > \pi(j)$. Říkáme, že permutace π je **sudá**, jestliže má sudý počet inverzí, naopak je **lichá**, jestliže má lichý počet inverzí. Definujeme **znaménko permutace**

$$\text{sign } \pi = \begin{cases} +1 & \pi \text{ je sudá,} \\ -1 & \pi \text{ je lichá.} \end{cases}$$

Cvičení 8.3. Určete znaménka permutací $\pi, \sigma, \pi \circ \sigma, \sigma \circ \pi$.

Definice. Buď $\mathbf{A}: T^n \rightarrow T^n$ čtvercová matice. Definujeme její **determinant** jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n)}.$$

Cvičení 8.4. Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \overline{12} \overline{36} \overline{45} |$

2. $\pi^{-1} = \overline{13} \overline{21} \overline{45} |, \sigma^{-1} = \overline{12} \overline{36} \overline{45} |,$
 $\pi \circ \sigma = \overline{13} \overline{21} \overline{45} \overline{12} \overline{36} \overline{45} | = || \overline{23} \overline{45} |,$
 $\sigma \circ \pi = \overline{12} \overline{36} \overline{45} \overline{13} \overline{21} \overline{45} | = \overline{13} \overline{21} \overline{45} |$

3. $\text{sign } \pi = \text{sign}(\pi \circ \sigma) = \text{sign}(\sigma \circ \pi) = -1, \text{sign } \sigma = 1$
 4. -38