Cvičení 11

Definice. Buď V lineární prostor nad tělesem T a nechť $\mathbf{f}\colon V \to V$ je lineární operátor. Řekneme, že nenulový vektor $\vec{x} \in V$ je **vlastním vektorem** zobrazení $\mathbf{f}$ příslušný **vlastnímu číslu** $\lambda \in T$, jestliže platí $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Pozorování. Číslo $\lambda \in T$ je vlastní číslo $\mathbf{f}$ právě tehdy, když je kořenem tzv. **charakteristického polynomu** $p_{\mathbf{f}}(\lambda) = \det(\mathbf{f} - \lambda\mathbf{E})$.

Cvičení 11.1. Najděte všechna vlastní čísla a příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení. Množina všech vlastních vektorů příslušných danému vlastnímu číslu λ doplněná o nulový vektor je vždy lineární podprostor V. Říká se mu **vlastní podprostor**.

Cvičení 11.2. Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Najděte bázi $\mathbb{R}^3$ tvořenou vlastními vektory matice $\mathbf{A}$. Označme nalezenou bázi $\mathscr{X}$.
b) Vyjádřete lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ popsané výše uvedenou maticí pomocí matice v bázi $\mathscr{X}$. Tj. najděte matici $\mathbf{A}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}}$.
c) Najděte rovněž matice transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$, $\mathbf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}}$.

Výše naznačený postup se nazývá *diagonalizace* matice $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}\colon T^n \to T^n$ se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže existuje báze T^n tvořená vlastními vektory $\mathbf{A}$. V takovém případě můžeme psát $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$, kde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n),$$

přičemž $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\mathbf{A}$ a $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou příslušné vlastní vektory.

Proces diagonalizace může selhat ze dvou důvodů, které si ilustrujeme v následujících příkladech.

Cvičení 11.3. Uvažujme matici otočení o devadesát stupňů $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte její vlastní čísla a vlastní vektory (nad $\mathbb{R}$). Je toto zobrazení diagonalizovatelné? Šla by matice diagonalizovat, kdybychom ji uvažovali jako zobrazení $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ (nad $\mathbb{C}$)?

Cvičení 11.4. Uvažujme operátor derivace $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Najděte jeho vlastní čísla a vlastní vektory. Je tento operátor diagonalizovatelný?

Řešení

1. $\lambda = 2$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = 3$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
2. Např. $\mathscr{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\mathbf{A}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Nad $\mathbb{R}$ nemá žádné vl. čísla a vektory. Nad $\mathbb{C}$ jsou vl.č. $\lambda = \pm i$ přísl. vl. v. $\begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Čtyřnásobné vl. č. $\lambda = 0$ má pouze jednorozměrný vl. podpr. $\operatorname{span}\{1\}$.