# Cvičení 12

Připomeňme si, že soustava $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých lze zapsat ve tvaru $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde $\mathbf{A}\colon T^n \to T^n$ je čvercová matice soustavy a $\vec{b} \in T^n$ je vektor pravých stran. Taková soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární matice, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ono řešení se dá spočítat vyjádřit pomocí inverzní matice jako $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$.

**Věta.** (Cramerovo pravidlo) Buďte $\mathbf{A}\colon T^n \to T^n$ čtvercová matice a $\vec{b} \in T^n$ sloupcový vektor. Jednotlivé složky řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det(\mathbf{A}_{\bullet 1} \cdots \mathbf{A}_{\bullet j-1}\, \vec{b}\, \mathbf{A}_{\bullet j+1} \cdots \mathbf{A}_{\bullet n}).$$

**Cvičení 12.1.** Spočítejte $x$-ovou složku průniku následujících rovin v $\mathbb{R}^3$

$$x + y + 2z = 3, \quad -x + y - z = 0, \quad x + 3z = 1.$$

**Cvičení 12.2.** Spočítejte částečně pomocí Cramerova pravidla všechna řešení následující soustavy v závislosti na parametru $\beta$

$$\begin{aligned} \beta x + \phantom{\beta}y + \phantom{\beta}z &= \beta \\ \beta x + \beta y + \phantom{\beta}z &= \beta \\ \beta x + \beta y + \beta z &= \beta \end{aligned}$$

## Řešení

1. $x = 2$

2. $\beta \neq 0, 1$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\beta = 0$: $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\beta = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$