Cvičení 13

Věta. (Inverze pomocí adjungované matice) Pro regulární matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(\mathbf{A}),$$

kde $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ je adjungovaná matice, tj. $[\operatorname{adj}(\mathbf{A})]_{ij} = D_{ji}$, kde

$$D_{ji} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A} \text{ s vyhozeným } j\text{-tým řádkem a } i\text{-tým sloupcem}$$

Cvičení 13.1. Spočítejte pomocí algebraických doplňků inverzi matice

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. **Skalární součin** je zobrazení $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon L \times L \to \mathbb{R}$, které je

- symetrické: $\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle = \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in L$,
- lineární v druhém argumentu: $\langle\vec{x}|\alpha\vec{y} + \vec{z}\rangle = \alpha\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}|\vec{z}\rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$, $\alpha \in T$,
- pozitivně definitní: $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle > 0$ pro každé $\vec{o} \neq \vec{x} \in L$.

Číslo $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}$ nazýváme **norma**[1] vektoru $\vec{x} \in L$ – je to jakési vyjádření jeho délky či velikosti. Definujeme rovněž **vzdálenost** dvou vektorů $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|$. Dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in L$ nazveme **ortogonální** (kolmé), jestliže $\langle x|y\rangle = 0$. Obecně můžeme definovat **úhel**, který dva vektory svírají jako

$$\varphi = \arccos \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

V $\mathbb{R}^n$ definujeme standardní skalární součin jako $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Poznámka. V důsledku symetrie je skalární součin lineární i v prvním argumentu. Jedná se tedy o tzv. bilineární symetrickou formu. Ovšem pozor, toto platí jen nad tělesem $\mathbb{R}$.

Nad tělesem $\mathbb{C}$ se skalární součin se místo symetrie předpokládá tzv. hermitovskost: $\langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$. V důsledku skalární součin není v prvním argumentu lineární, ale tzv. antilineární: $\langle\alpha x + y|z\rangle = \bar{\alpha}\langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$. Všude, kde se v přednášce vyskytuje *transponovaná matice* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, je nutné místo toho použít *hermitovsky sdruženou matici*, která se značí všelijak, ale nejčastěji asi $\mathbf{A}^*$ nebo $\mathbf{A}^\dagger$ a jedná se o transponovanou a zároveň komplexně sdruženou matici $\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$.

Cvičení 13.2. Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Spočítejte velikost vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$, jejich vzájemnou vzdálenost a úhel, který svírají.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Definice. Báze $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ lineárního prostoru se skalárním součinem L se nazývá **ortogonální**, jestliže jsou všechny vektory v bázi vzájemně ortogonální, tj. $\langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$. Báze se nazývá **ortonormální**, jestliže mají navíc všechny vektory báze normu 1, tj. $\langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle = \delta_{ij}$.

Věta. Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem a $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ortogonální báze. Potom lze souřadnice libovolného vektoru $\vec{v} \in L$ vyjádřit jako

$$[\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v}]_j = \frac{1}{\|\vec{x}_j\|^2} \langle\vec{x}_j|\vec{v}\rangle.$$

[1] Přesněji řečeno, je to norma indukovaná daným skalárním součinem. Pojem *norma* je v matematice obecnější a zahrnuje i zobrazení s podobnými vlastnostmi, které však uvedeným způsobem pomocí žádného skalárního součinu vyjádřit nelze. S těmi se můžete setkat například v numerické matematice.

Je-li $\mathscr{X}$ ortonormální, pak se vzorec ještě více zjednoduší:

$$[\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v}]_j = \langle \vec{x}_j | \vec{v} \rangle.$$

Cvičení 13.3. Uvažujme prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Rozhodněte, zde je báze $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ ortonormální nebo ortogonální, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte souřadnice vektoru $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$ v této bázi.

Tvrzení/Definice. Buď L lineární prostor se skalárním součinem, nechť W je lineární podprostor L. Potom pro libovolný vektor $\vec{v} \in L$ existuje jednoznačný rozklad $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$, kde $\vec{x} \in W$ a $\langle x | y \rangle = 0$. Vektor $\vec{x}$ značíme $\operatorname{proj}_W \vec{v}$ a nazýváme **ortogonální průmět** či **ortogonální projekce** $\vec{v}$ do podprostoru W. Vektor $\vec{y}$ pak nazýváme **ortogonální rejekce**. Zobrazení $\vec{v} \mapsto \operatorname{proj}_W \vec{v}$ je lineární a nazýváme **ortogonální projektor**.

Nyní by nás mohly zajímat způsoby výpočtu ortogonální projekce či projektoru. Nejprve se můžeme zamyslet nad speciálním případem, kdy $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ortogonální báze a $W = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ pro nějaké $k < n$. V tomto případě je zřejmé, že $\operatorname{proj}_W \vec{x}_i = \vec{x}_i$ pro $i \leq k$ a $\operatorname{proj}_W \vec{x}_i = \vec{o}$ pro $i > k$. Pro obecný vektor $\vec{v}$ tedy stačí najít jeho souřadnice v bázi $\mathscr{X}$ (k čemuž můžeme využít větu výše) a projekci spočítat tak, že budeme uvažovat jenom jeho prvních k souřadnic. Máme

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{x}_1 | v \rangle}{\|\vec{x}_1\|^2} \vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{x}_2 | v \rangle}{\|\vec{x}_2\|^2} \vec{x}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{x}_n | v \rangle}{\|\vec{x}_n\|^2} \vec{x}_n.$$

Po zapůsobení projektorem dostaneme

$$\operatorname{proj}_W \vec{v} = \frac{\langle \vec{x}_1 | v \rangle}{\|\vec{x}_1\|^2} \vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{x}_2 | v \rangle}{\|\vec{x}_2\|^2} \vec{x}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{x}_k | v \rangle}{\|\vec{x}_k\|^2} \vec{x}_k. \tag{$*$}$$

Všimněte si, že pro praktický výpočet ortogonální projekce podle vzorce $(*)$ vlastně nemusíme znát ortogonální bázi celého prostoru L. Stačí znát ortogonální bázi podprostoru W.

Cvičení 13.4. Pro situaci z předchozího cvičení najděte průmět vektoru $\vec{v}$ do roviny $W = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.

Pro situaci, kdy neznáme ortogonální bázi W můžeme využít tvrzení z přednášky.

Tvrzení. Uvažujme lineární prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, $W \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ je báze W (ne nutně ortogonální). Označme $\mathbf{A} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_k)$ matici, jejíž sloupečky jsou vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$. Potom lze matici ortogonální projekce na W zapsat ve tvaru

$$\operatorname{proj}_W = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Cvičení 13.5. Uvažujme v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem rovinu $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte průmět vektoru $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ do roviny V.

Řešení

1. a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
2. a) $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \sqrt{5}$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, $\varphi = \pi/2$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{10}$;
   b) $\|\vec{x}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{6}$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2$, $\cos\varphi = \sqrt{2}/3$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{6}$;
   c) $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{7}$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 3$, $\cos\varphi = 3/\sqrt{42}$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{7}$
3. Je ortogonální, není ortonormální; **coord** $_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. $\operatorname{proj}_W \vec{v} = 3\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
5. $\operatorname{proj}_W = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,
   $\operatorname{proj}_W \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$