Domácí úkol 2 – řešení

1. Rozhodněte, zda následující množina tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}[x]$

a) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{stupeň } p(x) \text{ je sudý}\}$
b) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{koeficienty u lichých mocnin } p(x) \text{ jsou nulové}\}$

Zadání (a) není napsané úplně jednoznačně. Není jasné, zda do množiny patří nulový polynom $o(x) = 0$. Řekli jsme, že nulový polynom budeme považovat za polynom stupně minus nekonečno, takže striktně vzato asi ne. Potom je práce jednoduchá: Množina není lineární podprostor, protože neobsahuje nulový vektor.

Nicméně i kdybychom do množiny nulový vektor přidali, tak stále nebude lineárním podprostorem, protože není uzavřená na sčítání. Například polynomy $p(x) = x^2$ a $q(x) = x - x^2$ mají oba sudý stupeň a patří tedy do množiny. Nicméně jejich součet $p(x) + q(x) = x$ má lichý stupeň a do množiny tedy nepatří. Množina tedy netvoří lineární podprostor.

V případě (b) množina lineární podprostor tvoří. Vskutku: vezměme dva libovolné prvky množiny $p(x)$ a $q(x)$. Označme jejich koeficienty takto:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{2n}, \\ q(x) &= \beta_0 + \beta_1 x^2 + \cdots + \beta_n x^{2n} \end{aligned}$$

(Netvrdíme, že α_n a β_n jsou nenulové. Polynomy klidně mohou mít různé stupně.) Potom i jejich lineární kombinace

$$p(x) + \gamma q(x) = (\alpha_0 + \gamma\beta_0) + (\alpha_1 + \gamma\beta_1)x^2 + \cdots + (\alpha_n + \gamma\beta_n)x^{2n}$$

patří do dané množiny. Množina tedy je lineární podprostor.

2. Rozhodněte, zda $\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ptáme se, zda existují $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{v} = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3$. Jinými slovy nás zajímá, zda má následující soustava řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení evidentně má. (Dokonce nekonečně mnoho. Jedno z nich je třeba $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.)