Domácí úkol 4

Toto je povinný domácí úkol, který prosím přineste na příští cvičení 20. 10. Pokud se na cvičení nemůžete dostavit, pošlete prosím úkol mailem. Úlohy mají za cíl procvičit to, co jsme dělali na posledním cvičení.

1. Najděte souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, kde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Najděte bázi a určete dimenzi vektorového prostoru $W = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Následující sada příkladů představuje nepovinný domácí úkol. Úlohy jsou náročnější, neboť mají za cíl motivovat obsah následujícího cvičení.

3. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ vektory

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ generující (zda generuje celé $\mathbb{R}^3$). (*Návod:* Zkuste na to přijít bez počítání!)
b) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ lineárně nezávislý.
c) Určete dimenzi $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Doplňte tento seznam na bázi $\mathbb{R}^3$, tj. najděte bázi $\mathbb{R}^3$ obsahující vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$. (*Návod:* Označíme-li $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektory kanonické báze, pak je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ určitě generující. Vybrat bázi z generujícího seznamu umíme z minulého cvičení.)
e) Najděte souřadnice vektorů $\vec{y}_1$ a $\vec{y}_2$ v bázi, kterou jste právě nalezli.
f) Rozhodněte zda platí $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$. (Zkuste využít předchozí výpočty.)

4. Ukažte, že je-li seznam $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ lineárně nezávislý, ale není generující, tj. existuje vektor $\vec{y} \notin \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$, pak je nově utvořený seznam $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y})$ rovněž lineárně nezávislý.

Kdo chce, může se pokusit využitím úlohy výše přesně zformulovat a dokázat následující větu:

Věta. Každá lineárně nezávislá množina lze doplnit na bázi.

5. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dané maticí[1]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[1] Připomenutí: Ve sloupečcích matice jsou obrazy vektorů kanonické báze. Zobrazení $\mathbf{A}$ tedy zobrazuje $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Určete, jak matice působí na obecný vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

b) Najděte všechna řešení rovnice $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Rozhodněte, zda daná množina řešení tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, jaká je jeho dimenze?

d) Uvažujme lineární obal sloupečků matice $\mathbf{A}$, tj. $V := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Najděte bázi V a určete dimenzi V.

e) Ukažte, že V je ve skutečnosti obor hodnot (tzv. *obraz*) zobrazení $\mathbf{A}$, tj. $V = \{\mathbf{A}\vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$.

6. Navštivte stránky shad.io/MatVis a hrajte si.

(*Návod:* Pomocí červeného a zeleného terče se nastaví obrazy vektorů standardní báze. Tím se současně nastaví, jak vypadá matice v levém horním rohu. Táhlo pod obrázkem pak zrealizuje danou lineární transformaci. Je-li táhlo vlevo, nacházíme se v definičním oboru. Táhnutím doprava pak aplikujeme lineární transformaci a úplně vpravo je pak daný obraz.)

Zkuste se speciálně podívat na následující transformace

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Jak by se tyto transformace daly popsat slovy?

Dokážete najít matici zrcadlení podél přímky $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (tj. přímka procházející počátkem a bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. směřující šikmo doprava nahoru)?