Domácí úkol 7

Následující nepovinnou část domácího úkolu stačí přinést až na deváté cvičení 17. 11. Nicméně nemusí být nutně k zahození zkusit si jej spočítat už před písemkou. Pokud se na cvičení nemůžete dostavit, pošlete prosím úkol mailem. Úlohy mají za cíl procvičit to, co jsme dělali na posledním cvičení.

1. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ dané předpisem

$$\mathbf{f}(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2.$$

Najděte jeho matici v kanonické bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2)$. Rozhodněte, zda se jedná o izomorfismus. (Nepovinné, ale užitečné: Ověřte nejprve, že se skutečně jedná o lineární zobrazení.)

2. Uvažujme následující báze v $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3), \qquad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Najděte matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}}$. Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ v bázi $\mathscr{Y}$.

Následující sada příkladů představuje nepovinný domácí úkol. Úlohy jsou náročnější, neboť mají za cíl motivovat obsah následujícího cvičení.

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvraťte.

a) Existuje monomorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
b) Existuje epimorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
c) Hodnost matice je vždy větší nebo rovna jejímu defektu, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \geq \underset{\cdot}{\mathbf{A}}$ pro každou matici $\mathbf{A}$.
d) Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi cílového lineárního prostoru, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq r$ pro každou matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.
e) Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi definičního oboru, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq s$ pro každou matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.

4. Vzpomeňte si na operátor derivace $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, který zobratuje

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \mapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

a) Připomeňte si, jak vypadá matice tohoto operátoru v kanonické bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$.
b) Najděte matici tohoto opertáoru $\mathbf{D}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}}$ v bázi $\mathscr{X} = (1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3)$ bez použití matic transformace souřadnic.
c) Najděte matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}}$ a $\mathbf{T}_{\mathscr{E} \mapsto \mathscr{X}}$, kde $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$ je kanonická báze $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.
d) Ověřte pomocí maticového násobení, že platí $\mathbf{D}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}} = \mathbf{T}_{\mathscr{E} \mapsto \mathscr{X}} \mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} \mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}}$.
e) Najděte souřadnice polynomu $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ v bázi $\mathscr{X}$.

5. V závislosti na hodnotě parametru $\lambda \in \mathbb{C}$ určete, zda má následující soustava řešení a určete jeho dimenzi. Pokuste se pro každý případ množinu řešení nějak popsat.

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^3 \end{cases}$$

6. Ukažte, že zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je izomorfismus právě tehdy, když $ad \neq bc$. Pokuste se k výsledku dojít bez použití znalostí o determinantu.