Domácí úkol 7 – řešení

1. Uvažujme lineární zobrazení $\mathsf{f}\colon \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ dané předpisem

$$\mathsf{f}(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2.$$

Najděte jeho matici v kanonické bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2)$. Rozhodněte, zda se jedná o izomorfismus. (Nepovinné, ale užitečné: Ověřte nejprve, že se skutečně jedná o lineární zobrazení.)

Pro nalezení matice zobrazení v bázi stačí nalézt obrazy bazických vektorů a pak je opět vyjádřit jako souřadnice v dané bázi. V případě kanonické báze je to vše poměrně snadné:

$$\begin{aligned}
\mathsf{f}(1) &= 1 + 1x + 1x^2 = 1 + x + x^2 \\
\mathsf{f}(x) &= 0 + 1x + 2x^2 = x + 2x^2 \\
\mathsf{f}(x^2) &= 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 = x + 4x^2
\end{aligned}$$

Tedy:

$$\mathsf{coord}_{\mathscr{E}}\, \mathsf{f}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{coord}_{\mathscr{E}}\, \mathsf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{coord}_{\mathscr{E}}\, \mathsf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení f v bázi $\mathscr{E}$ tedy je

$$\mathsf{f}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zbývá rozhodnout, zda se jedná o izomorfismus. Vzhledem k tomu, že jsme již zobrazení vyjádřili pomocí matice, můžeme využít známý postup pro matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zobrazení je tedy evidentně izomorfismus.

Bonus: Ukážeme, že je zobrazení lineární. Dá se to udělat dvěma způsoby. První způsob je přímo z definice. Vezměme dva polynomy $p(x)$ a $q(x)$ a uvažujme jejich lineární kombinaci $r(x) = \alpha p(x) + q(x)$. Potom speciálně když dosadíme libovolnou hodnotu $a \in \mathbb{R}$ za x, dostaneme pochopitelně $r(a) = \alpha p(a) + q(a)$. Tedy:

$$\begin{aligned}
\mathsf{f}(r(x)) = r(0) + r(1)x + r(2)x^2 &= \alpha p(0) + q(0) + (\alpha p(1) + q(1))x + (\alpha p(2) + q(2))x^2 \\
&= \alpha(p(0) + p(1)x + p(2)x^2) + (q(0) + q(1)x + q(2)x^2) = \alpha \mathsf{f}(p(x)) + \mathsf{f}(q(x)),
\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.

Druhý způsob je ukázat, že to vyjádření pomocí matice funguje. Víme totiž, že násobení matice krát vektor je lineární zobrazení na vektorech, takže lze-li f vyjádřit touto formou, musí být lineární. Jinými slovy, musíme tedy ukázat, že pro libovolný polynom $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ je jeho obraz dán výrazem

$$\mathsf{f}(p(x)) = \alpha \mathsf{f}(1) + \beta \mathsf{f}(x) + \gamma \mathsf{f}(x^2) = \alpha + (\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha + 2\beta + 4\gamma)x^2.$$

Vskutku to tak je: $p(0) = \alpha$, $p(1) = \alpha + \beta + \gamma$, $p(2) = \alpha + 2\beta + 4\gamma$, takže výsledek sedí s původním předpisem.

2. Uvažujme následující báze v $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3), \qquad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Najděte matici transformace souřadnic $\mathsf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}}$. Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ v bázi $\mathscr{Y}$.

Zde je potřeba vyjádřit vektory báze $\mathscr{X}$ v bázi $\mathscr{Y}$. To se provede vyřešením následující soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Matice přechodu tedy je $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{Y}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Nakonec jsme měli vyjádřit souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ v bázi $\mathscr{Y}$. Pro tento účel si nejdříve uvědomíme, že $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, a tedy

$$\mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\, \vec{v} = \mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{Y}}\, \mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tentokrát uvedeme i řešení nepovinných úloh

3.

a) Je to pravda. Například matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ je monomorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

b) Není pravda. Jak jsme si uváděli na cvičení, nutnou podmínkou pro epimorfismus je, aby daná matice měla aspoň tolik sloupců co řádků.

c) Je to pravda. Z přednášky víme, že inverzní zobrazení k lineárnímu zobrazení je zase lineární. Stačí tedy ukázat, že $\mathbf{f}^{-1}$ je bijekce. Zobrazení je bijektivní právě tehdy, když má inverzi. Snadno ověříme, že $\mathbf{f}^{-1}$ má inverzi – jedná se o zobrazení $\mathbf{f}$.

d) Není pravda. Například nulová matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má defekt dva a hodnost nula.

e) Je to pravda. Hodnost $\operatorname{rank} \mathbf{A}$ je definována jako dimenze obrazu $\operatorname{im} \mathbf{A}$. Vzhledem k tomu, že $\operatorname{im} \mathbf{A}$ je podprostor cílového prostoru $\mathbb{R}^r$, musí jeho dimenze být menší, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \dim \operatorname{im} \mathbf{A} \leq \dim \mathbb{R}^r = r$.

f) Je to pravda. Věta o dimenzi jádra a obrazu říká, že $\operatorname{rank} \mathbf{A} + \underset{\cdot}{\mathbf{A}} = s$. Z toho zjevně plyne, že $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq s$.

4.

a) Prostě zderivujeme ty polynomy

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(1) &= 0, \\ \mathbf{D}(x-2) &= 1, \\ \mathbf{D}((x-2)^2) &= 2(x-2), \\ \mathbf{D}((x-2)^3) &= 3(x-2)^2. \end{aligned}$$

Z toho snadno vidíme, že

$$\mathbf{D}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kupodivu matice vychází stejně jako v standardní bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$.

b) Snadněji se hledá $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \mathbf{E}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{X}}$, neboť její sloupečky jsou souřadnice vektorů báze $\mathscr{X}$ v bázi $\mathscr{E}$, tedy

$$\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici opačné transformace spočítáme jako inverzi této matice

$$\mathsf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}} = (\mathsf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Provedeme maticové násobení a mělo by skutečně vyjít…

d) Nyní už nemusíme znovu provádět Gaussovu eliminaci, ale stačí spočítat

$$\mathsf{coord}_{\mathscr{X}}\, p(x) = \mathsf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}}\, \mathsf{coord}_{\mathscr{E}}\, p(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Vyřešíme Gaussovou eliminací. Při práci s parametry je nutné dávat pozor na to, abychom žádnou rovnici nevynásobili nebo nevydělili nulou. Oproti tomu přičítat c-násobek jiného řádku lze pro libovolné c (je-li $c = 0$, neuděláme nic). Řešit tedy můžeme třeba takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \check{R}_2 \\ \check{R}_1 - \lambda\check{R}_2 \\ \check{R}_3 - \check{R}_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^3-\lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \check{R}_1 \\ \check{R}_3 \\ \check{R}_2 - (1+\lambda)\check{R}_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^3-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda^2)(1+\lambda+\lambda^2) \end{array}\right)$$

Pro $\lambda \neq 1, -2$ je matice evidentně v horním blokovém tvaru a má maximální hodnost. Soustava má tedy právě jedno řešení.

Pro $\lambda = -2$ vypadá upravená soustava takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Je tedy rovněž v horním blokovém tvaru, ale evidentně nemá žádné řešení.

Pro $\lambda = 1$ vypadá upravená soustava takto

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Je tedy také v horním blokovém tvaru a má nekonečně mnoho řešení.

Dá se řešit i jinak. Například jste se po druhém kroku mohli rozhodnout zvlášť diskutovat případ $\lambda = 1$ a pro $\lambda \neq 1$ poslední dvě rovnice $(1-\lambda)$.