Domácí úkol 10 – řešení

1. *(5 b.)* Rozhodněte zda platí následující tvrzení. Tvrzení buď dokažte nebo vyvraťte.

Žádná soustava dvou lineárních rovnic o třech neznámých nemá právě jedno řešení.

Tvrzení platí.

Důkaz. Podle Frobeniovy věty může mít soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ právě jedno řešení jen tehdy, když má soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ právě jedno řešení, tj. $\ker \mathbf{A} = \{0\}$, tj. $\mathbf{A}$ je monomorfismus. Soustava dvou rovnic o třech neznámých je popsaná maticí 2×3, tj. lineárním zobrazením $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$, kde $\mathbb{F}$ je příslušné těleso. Jak už jsme na cvičeních několikrát zmiňovali, matice, která má více sloupečků než řádků, nemůže být monomorfismus.

2. *(5 b.)* Definujte pojmy *permutace* a *determinant matice.*

Viz cvičení:

Definice. Bijektivní zobrazení $\pi\colon M \to M$, kde M je konečná množina, nazýváme *permutace* množiny M. Množinu všech permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ značíme S_n.

Definice. Buď $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ čtvercová matice. Definujeme její *determinant* jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \, \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n)}.$$

3. *(10 b.)* V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$, vypočítejte hodnotu determinantu následující matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, pro které hodnoty parametru a je matice regulární (tj. představuje izomorfismus).

Determinant můžete spočítat libovolnou svojí oblíbenou metedou nebo jejich kombinací:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3a \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3a(4 + 10 - 8 - 6) = 0$$

Matice tedy není regulární pro žádné $a \in \mathbb{R}$.