Domácí úkol 11

Následující povinnou část domácího úkolu stačí přinést až v třináctém týdnu 15. 12. Nicméně nemusí být nutně k zahození zkusit si jej spočítat už před písemkou. Pokud se na cvičení nemůžete dostavit, pošlete prosím úkol mailem. Úlohy mají za cíl procvičit to, co jsme dělali na posledním cvičení.

1. Vyřešte v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ následující soustavu rovnic.

$$\begin{cases} \lambda x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda x + \lambda y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

2. Diagonalizujte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Tj. najděte bázi $\mathscr{X}$ z vlastních vektorů a vyjádřete $\mathbf{A}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}}$.

Následující sada příkladů představuje nepovinný domácí úkol. Úlohy jsou náročnější, neboť mají za cíl motivovat obsah následujícího cvičení.

3. Uvažujme následující matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte její vlastní čísla a vlastní vektory. Je tato matice diagonalizovatelná? Najděte matici zobrazení $\mathbf{A}$ v bázi $\mathscr{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

4. Uvažujme matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $\mathbf{B}^{2022}$. *Návod:* Spočítejte nejprve vlastní čísla a vlastní vektory matice. Matici diagonalizujte, tj. vyjádřete v bázi vlastních vektorů. Místo umocňování původní matice $\mathbf{A}$ můžete umocnit matici zobrazení v této nové bázi.

5. Vzpomeňme si znovu na operátor derivování $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3} \to \mathbb{R}^{\leq 3}$ a na jeho matici ve standardní bázi. Spočítejte, jak vypadají matice zobrazení $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{D}^3$ a tak dále. Ukažte, že $\mathbf{D}$ je tzv. *nilpotentní*, tj. pro nějakou mocninu k už máme $\mathbf{D}^k = \mathbf{O}$, kde $\mathbf{O}$ je nulový operátor.

6. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $\mathbf{f}\colon V \to V$ je libovolný nenulový lineární operátor. Je-li $\mathbf{f}$ nilpotentní (tj. $\mathbf{f}^k = \mathbf{O}$ pro nějaké k), pak $\mathbf{f}$ není diagonalizovatelný.

Nápověda: Dokazujte sporem/obměnou. Předpokládejte, že $\mathbf{f}$ je diagonalizovatelný (a nenulový), a ukažte, že pak nemůže být nilpotentní. (Nebo můžete předpokládat, že je diagonalizovatelný a nilpotentní a ukázat, že pak už je nutně nulový.)