Domácí úkol 11 – řešení

1. Vyřešte v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ následující soustavu rovnic.

$$\begin{cases} \lambda x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda x + \lambda y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Ukážeme si oba možné způsoby řešení – pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Cramerova pravidla.

Způsob 1. Gaussova eliminace:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Kdybychom teď prohodili druhý a třetí sloupeček i řádek, tak už to vypadá na trojúhelníkovou matici. Za předpokladu, že $\lambda \neq \pm 1$ jsou na diagonále samá nenulová čísla a můžeme psát jednoznačné řešení $y = 1$, $z = -\lambda$, $x = \lambda$. Jinými slovy množina řešení je tvaru $\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}\right\}$. Řešení ve speciálních dvou případech rovněž snadno dopočítáme po dosazení za λ:

$$\lambda = +1\colon \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Řešení: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\lambda = -1\colon \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Řešení: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Způsob 2. Cramerovo pravidlo.

Nejprve spočítáme determinant matice soustavy:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda^3 + 1 - \lambda^2 - \lambda - \lambda^2 = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Cramerovo pravidlo tedy můžeme použít jen pro $\lambda \neq \pm 1$. Výsledek je následující:

$$x = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda + \lambda^4 + \lambda - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda}{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1} = \frac{\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda}{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1} = \lambda$$

$$y = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda+1)} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda^3 + \lambda^3 + 1 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda}{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1} = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1} = 1$$

$$z = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda+1)} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda - \lambda^4 - \lambda^2}{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1} = \frac{-\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda}{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1} = -\lambda$$

V ostatních případech musíme použít Gaussovu eliminaci:

$$\lambda = +1\colon \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Řešení: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\lambda = -1\colon \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Řešení: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

2. Diagonalizujte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Tj. najděte bázi $\mathscr{X}$ z vlastních vektorů a vyjádřete $\mathbf{A}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}}$.

Začneme výpočtem vlastních čísel. Ta se získají jako kořeny charakteristického polynomu:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 + 4 + 4(-3-\lambda) + 2(2-\lambda) + 2\lambda$$
$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-1)$$

Vlastní čísla tedy jsou $0, -2, 1$. Jdeme hledat vlastní vektory. Vždy dosadíme dané číslo do matice výše a vyřešíme jako soustavu. Pro každé λ budeme množinu řešení (vlastní podprostor) značit V_λ.

$$\lambda = 0\colon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad V_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = -2\colon \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \to \quad V_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 1\colon \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad \to \quad V_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Nalezli jsme tedy bázi z vlastních vektorů $\mathscr{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. V této bázi má zadané lineární zobrazení tvar $\mathbf{A}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Charakteristický polynom nám vyjde

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda = 0$ a $\lambda = 2$. Spočítejme tedy jednotlivé vlastní podprostory. Pro $\lambda = 0$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a vyjde nám $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Pro $\lambda = 2$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a vyjde nám $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Matice tedy **není** diagonalizovatelná, neboť jsme našli pouze dva lineárně nezávislé vlastní vektory, což na bázi $\mathbb{R}^3$ nestačí. Přesněji řečeno, problém skýtá vlastní podprostor příslušný $\lambda = 2$, neboť toto číslo je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu, ale našli jsme pouze jednorozměrný vlastní podprostor.

Zadáno bylo najít matici $\mathbf{A}$ v bázo $\mathscr{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Všimněme si nejprve, že dva z těch tří vektorů jsou vlastní vektory $\mathbf{A}$. Ten třetí byl však také vybrán jistým speciálním způsobem. Vskutku:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teď už tedy můžeme psát rovnou tvar $\mathbf{A}$ v bázi $\mathscr{X}$:

$$\mathbf{A}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jedná se přesně o *Jordanův tvar* matice $\mathbf{A}$ (viz přednášku).

4. Kdybych vám neporadil matici diagonalizovat, možná vás napadne ji tak zkusmo začít umocňovat. Pokud byste byli trpěliví a dostali se až ke čtvrté mocnině, přišli byste na to, že $\mathbf{B}^4 = \mathbf{E}$ je jednotková matice. Z toho plyne, že umocníme-li $\mathbf{B}$ na jakýkoliv násobek čtyřky, dostaneme jednotkovou matici, tj. $\mathbf{B}^{2020} = \mathbf{E}$. Nakonec $\mathbf{B}^{2021} = \mathbf{B}$.

Teď se podíváme na to, jak se k výsledku přijde pomocí vlasních čísel a vlastních vektorů. Trik spočívá v procesu diagonalizace, neboť s diagonálními maticemi se pracuje daleko lépe než s obecnými. Najděme tedy nejprve vlastní čísla a vlastní vektory. Začneme s charakteristickým polynomem

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & -3 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 3 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = (1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

Nad $\mathbb{C}$ má tedy matice vlastní čísla $1, i, -i$. Počítat vlastní vektory už není potřeba, ale jako cvičení to doporučuji. Mělo by vyjít $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \\ -2+i \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \\ -2-i \end{pmatrix}\right\}$. Zejména ty komplexní vlastní vektory vám klidně mohly vyjít v úplně jiném tvaru a přesto to můžete mít správně. Že jste dobře počítali si ověříte tak, že spočítáte $\mathbf{B}\vec{x}$ pro váš nalezený vektor $\vec{x}$.

Každopádně nyní můžeme matici diagonalizovat, tj. vyjádřit v nalezená bázi $\mathscr{Y}$ z vlastních vektorů, čímž nám vyjde

$$\mathbf{B}_{\mathscr{Y}}^{\mathscr{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Nyní je už evidentní, že $\mathbf{B}^4 = \mathbf{E}$ (vzpomeňme si na to, že $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})_{\mathscr{Y}}^{\mathscr{Y}} = \mathbf{B}_{\mathscr{Y}}^{\mathscr{Y}} \cdot \mathbf{B}_{\mathscr{Y}}^{\mathscr{Y}}$), takže $\mathbf{B}^{2021} = \mathbf{B}$.

Nakonec si ještě všimněte, že jsem sice nespecifikoval těleso, ale v tomto případě je to úplně jedno. Výsledná odpověď $\mathbf{B}^{2021} = \mathbf{B}$ platí nad jakýmkoliv tělesem $T \subset \mathbb{C}$. Třeba i nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{Q}$, ačkoliv matici nad těmito tělesy nelze diagonalizovat.

5. Můžeme buď pracovat přímo se samotným operátorem derivování $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Zde pak $\mathbf{D}^k$ je operátor k-té derivace. Zderivováním polynomu stupně nejvýše tři dostaneme polynom stupně nejvýše dva. Druhou derivací dostaneme polynom stupně nejvýše jedna, třetí pak konstatní polynom a nakonec $\mathbf{D}^4 p(x) = 0$ pro libovolný $p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Tedy $\mathbf{D}^4 = \mathbf{O}$.

Druhý způsob je použít maticový tvar:

$$\mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}^2)_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} \cdot \mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}^3)_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = (\mathbf{D}^2)_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} \cdot \mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{D}^4)_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = (\mathbf{D}^3)_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} \cdot \mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Jak jsem napovídal, je vhodné dokazovat sporem. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{f}$ je nilpotentní, tj. $\mathbf{f}^k = \mathbf{O}$ a zároveň, že má bázi $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ z vlastních vektorů. Označme λ_i příslušná vlastní čísla, tj. $\mathbf{f}(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$. Z nilpotentnosti máme $0 = \mathbf{f}^k(\vec{x}_i) = \lambda_i^k \vec{x}_i$. To ale znamená, že $\lambda_i = 0$ pro každé i. To ale znamená, že $\mathbf{f}(\vec{x}_i) = 0$ pro každý vektor z báze, takže $\mathbf{f}$ musí být nulové zobrazení. Tím je důkaz hotov.

Poněkud ilustrativnější prezentaci téhož důkazu lze získat pomocí diagonalizace. Předpokládejme znovu, že $\mathbf{f}$ má bázi z vlastních vektorů $\mathscr{X}$. Potom je tedy $\mathbf{f}$ v bázi $\mathscr{X}$ tvaru

$$\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Potom rovnost

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{f}^k)_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}} = (\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}})^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

už evidentně implikuje, že $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, a tedy $\mathbf{f}$ musí být nulový operátor.