Domácí úkol 13

Toto je povinný domácí úkol, který prosím přineste na příští cvičení 12. 1. Pokud se na cvičení nemůžete dostavit, pošlete prosím úkol mailem. Úlohy mají za cíl procvičit to, co jsme dělali na posledním cvičení.

1. Uvažujme podprostor $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte kolmý průmět vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ do roviny V.

2. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvraťte.

a) Je-li matice $\mathbf{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ nilpotentní, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
b) Má-li matice $\mathbf{B}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ na diagonále samé nuly, pak $\det \mathbf{B} = 0$.
c) Má-li matice $\mathbf{C}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ n vzájemně různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Následující sada příkladů představuje nepovinný domácí úkol. Úlohy jsou náročnější, neboť mají za cíl motivovat obsah následujícího cvičení.

Připomeňte si z přednášky výpočet inverze matice pomocí algebraických doplňků:

Věta. (Inverze pomocí adjungované matice) Pro regulární matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(\mathbf{A}),$$

kde $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ je adjungovaná matice, tj. $[\operatorname{adj}(\mathbf{A})]_{ij} = D_{ji}$, kde

$$D_{ji} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A} \text{ s vyhozeným } j\text{-tým řádkem a } i\text{-tým sloupcem}$$

3. Spočítejte pomocí algebraických doplňků inverzi matice

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Vyřešte následující maticové rovnice. (Neznámou je matice $\mathbf{X}$. Nejprve je nutné určit její rozměry!)

a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$,
b) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,
c) $\mathbf{AX} = \mathbf{X}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Najděte matici ortogonální projekce $\mathbf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na podprostor

a) $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
b) $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
c) $W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ve všech případech najděte kolmý průmět vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ do roviny W.

6. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Dokažte, že báze $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ortonormální právě tehdy, když $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}}$ je ortogonální matice, tj. $\mathbf{T}_{\mathscr{E} \mapsto \mathscr{X}} = (\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}})^{-1} = (\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}})^{\mathrm{T}}$. Zde značíme $\mathscr{E}$ standardní bázi $\mathbb{R}^n$.