Domácí úkol 13 – řešení

1. Uvažujme podprostor $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte kolmý průmět vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ do roviny V.

Příklad se dá vyřešit dvěma způsoby. Můžeme si projít oba dva.

Jako první jsme si na cvičení ukazovali přístup, který funguje, známe-li ortogonální bázi zadaného podprostoru V. Ověříme tedy, zda jsou vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ vzájemně kolmé: $\langle \vec{x}_1 | \vec{x}_2 \rangle = 2 - 2 + 0 = 0$. Ano jsou! Můžeme tedy použít následující vzorec:

$$\operatorname{proj}_V \vec{v} = \frac{\langle \vec{x}_1 | \vec{v} \rangle}{\|x_1\|^2} \vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{x}_2 | \vec{v} \rangle}{\|x_2\|^2} \vec{x}_2 = \frac{5}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{28}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Druhý způsob funguje obecně, akorát je o něco pracnější. Ze zadaných vektorů sestavíme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a spočítáme $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Dáme se tedy do toho:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že matice je diagonální. To díky tomu, že jsou na sebe vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ kolmé. Na diagonále máme normy na druhou. Vzhledem k tomu, že je matice diagonální, počítá se její inverze snadno prostě převrácením čísel na diagonále. Nakonec máme

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 34 & -18 & 30 \\ -18 & 61 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix}$$

Nakonec

$$\operatorname{proj}_V \vec{v} = \mathbf{P}\vec{v} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 34 & -18 & 30 \\ -18 & 61 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ještě mi dovolte jednou zdůraznit, že první postup je sice jendodušší, ale funguje jen v případě, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots)$ tvoří *ortogonální* bázi!

2. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvraťte.

a) Ano, je to pravda. Důkaz: Je-li $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, pak $0 = \det(\mathbf{A}^k) = (\det \mathbf{A})^k$, tedy $\det \mathbf{A} = 0$.

b) Ne, není to pravda. Například $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ má na diagonále samé nuly, ale $\det \mathbf{B} = -1$.

c) Ano, je to pravda. Pro každé vlastní číslo máme vždy alespoň jeden vlastní vektor. Je-li různých vlastních čísel n, pak získáme n lineárně nezávislých vlastních vektorů, které tvoří bázi $\mathbb{C}^n$. Matice je tedy diagonalizovatelná.

3. Spočítejte pomocí algebraických doplňků inverzi matice

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 13 \\ -6 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

4.

a) Zde je nejspíš nejjednodušší vynásobit rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ zleva $\mathbf{A}^{-1}$ čímž dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, tedy

$$\mathbf{X} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lze však vyřešit i jako soustavu lineárních rovnic stejně jako další části.

b) Tady už nám žádný podobný trik jako výše nezafunguje, takže prostě budeme muset rovnici rozepsat ve složkách. Nejprve je vhodné rozmyslet, že aby měla rovnice smysl, tak musí být matice $\mathbf{X}$ typu 2×2. Označme tedy její složky $\mathbf{X} = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right)$ a dosaďme.

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{21} & 2x_{12} + x_{22} \\ 3x_{11} + 2x_{21} & 3x_{12} + 2x_{22} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{XA} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} + 3x_{12} & x_{11} + 2x_{12} \\ 2x_{21} + 3x_{22} & x_{21} + 2x_{22} \end{pmatrix}$$

Z rovnosti $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ nám vychází soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2x_{11} + x_{21} &= 2x_{11} + 3x_{12}, \\ 2x_{12} + x_{22} &= x_{11} + 2x_{12}, \\ 3x_{11} + 2x_{21} &= 2x_{21} + 3x_{22}, \\ 3x_{12} + 2x_{22} &= x_{21} + 2x_{22}, \end{aligned}$$

jejímž vyřešením dostaneme výsledek

$$\mathbf{X} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

neboli

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} t & s \\ -3s & t \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbb{C}.$$

c) U rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{X}$, kde $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, není velikost matice $\mathbf{X}$ jednoznačně zřejmá. Rovnice dává smysl pro $\mathbf{X}$ o rozměrech $2 \times s$, kde s je libovolné kladné přirozené číslo. To nám však nezabrání v tom, vyřešit danou rovnici zcela obecně. Označme $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$ sloupečky matice $\mathbf{X}$, tj. $\mathbf{X} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_s)$. Potom $\mathbf{AX} = (\mathbf{A}\vec{x}_1 \cdots \mathbf{A}\vec{x}_s)$. Každý sloupeček matice $\mathbf{X}$ tedy musí být řešením rovnice $\mathbf{A}\vec{x}_i = \vec{x}_i$. Snadno zjistíme, že tato rovnice má pouze triviální řešení $\vec{x}_i = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Řešením dané maticové rovnice jsou tedy právě všechny nulové matice o rozměrech $2 \times s$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

5. Ve všech případech můžeme použít vzorec $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. V prvních dvou případech to však není nutné. Stačí využít toho, že kanonická báze $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (kde $\vec{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$) je ortogonální.

a) Zde projekce evidentně musí zobrazovat $\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_2$, $\vec{e}_3 \mapsto \vec{o}$, tj. $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Hledaný ortogonální průmět je $\mathbf{P}\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Zde projekce evidentně musí zobrazovat $\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \mapsto \vec{o}$, $\vec{e}_3 \mapsto \vec{e}_3$, tj. $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Hledaný ortogonální průmět je $\mathbf{P}\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \vec{v}$ (vektor $\vec{v}$ leží v dané rovině W).

c) Zde použijeme vzorec. Rovina W je lineárním obalem sloupečků matice $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Spočítáme

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vyplatí se provést zkoušku: Skutečně platí $\mathbf{P}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathbf{P}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Navíc evidentně $\operatorname{rank}\mathbf{P} = 2$, tj. skutečně $\operatorname{im}\mathbf{P} = W$, takže matice $\mathbf{P}$ skutečně projektuje na W. Z toho, že matice $\mathbf{P}$ je symetrická plyne, že jde skutečně o *ortogonální* projekci.

Nakonec můžeme spočítat $\mathbf{P}\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Tvrzení v podstatě říká, že zatímco matice transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$ má ve sloupečcích vektory báze $\mathscr{X}$, tak pokud je báze $\mathscr{X}$ ortonormální, pak matice opačné transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}}$ má vektory báze $\mathscr{X}$ v řádcích. Zkusme ho tedy řádně zformulovat a dokázat.

Tvrzení. Uvažujme v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem bázi $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Báze $\mathscr{X}$ je ortonormální právě tehdy, když je matice $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$ ortogonální, tj. platí $\mathbf{T}^{-1}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$.

Důkaz. Začněme třeba implikací zleva doprava. Abychom dokázali, že $\mathbf{T}^{-1}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$, tak stačí ukázat, že

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \mathbf{E}.$$

No tak zkusme upravit levou stranu. Vyjádříme si, jak vypadá prvek matice na pozici (i, j).

$$\begin{aligned}
[\mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}]_{ik}[\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}]_{ki}[\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}[\vec{x}_i]_k[\vec{x}_j]_k = \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij} = \mathbf{E}_{ij},
\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Nyní ukážeme opačnou implikaci. Předpokládáme, že $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$ je ortogonální matice, a chceme dokázat, že $\mathscr{X}$ je ortonormální báze. Vyjdeme z toho, že platí $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \mathbf{E}$. Když zopakujeme výpočet výše, vyjde nám, že

$$\langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = [\mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}]_{ij} = \mathbf{E}_{ij} = \delta_{ij},$$

což jsme chtěli ukázat. $\square$