Cvičení 3

Nejprve se podíváme na nepovinný domácí úkol a připomeneme důležitý pojem z minula.

Tvrzení. Buď V nějaký lineární podprostor lineárního prostoru L. Uvažujme $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$. Potom $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subseteq V$.

Tvrzení. Uvažujme v L dvě množiny vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ a $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$. Označme $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$, $W := \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$. Potom platí $V = W$ právě tehdy, když $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in W$ a $\vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_l \in W$.

Cvičení 3.1. Uvažujme následující vektory v $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Označme $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, $W = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$. Rozhodněte zda platí následující tvrzení

a) $\vec{y}_1 \in V$, b) $\vec{y}_2 \in V$, c) $\vec{y}_3 \in V$,
d) $\vec{x}_1 \in W$, e) $\vec{x}_2 \in W$, f) $\vec{x}_3 \in W$,
g) $V = W$, h) $V = \mathbb{R}^3$, i) $W = \mathbb{R}^3$.

Definice. Množinu vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ nazveme **lineárně nezávislou**, jestliže rovnost $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{o}$ implikuje $\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0$. V opačném případě je tato množina **lineárně závislá**.

Cvičení 3.2. Uvažujte vektory z předchozího úkolu. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé.

a) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ b) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ c) $\{\vec{x}_1\}$ d) $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ e) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$ f) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_3\}$

Lineární (ne)závislost, báze, dimenze

Definice. Množina vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ **generuje** podprostor $V \subset L$, jestliže $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$.

Cvičení 3.3. Uvažujme opět tytéž vektory. Rozhodněte, zda následující množina generuje V.

a) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ b) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ c) $\{\vec{x}_1\}$ d) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$ e) $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1\}$ f) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_3\}$

Definice. Báze lineárního prostoru L je libovolná lineárně nezávislá generující množina (tj. množina, která generuje celý prostor L).

Definice. Dimenze lineárního prostoru L je velikost jeho (jakékoliv) báze. Existuje-li v L lineárně nezávislá množina velikosti n pro každé $n \in \mathbb{N}$, řekneme, že L má dimenzi **nekonečno**.

Tvrzení. Každá báze lineárního prostoru L má stejnou velikost. Uvedená definice tedy dává smysl.

Tvrzení. Nechť je dimenze lineárního prostoru L konečná, tj. $n := \dim L < \infty$. Potom je každá lineárně nezávislá množina velikosti n generující (a tedy báze). Rovněž každá generující množina velikosti n je automaticky lineárně nezávislá (a tedy báze).

Cvičení 3.4. Určete dimenzi $V \subset \mathbb{R}^3$ ze cvičení výše.

Cvičení 3.5. Jaká je dimenze $\mathbb{R}^n$?

Souřadnice

Hlavní aplikací pojmu báze je zavedení tzv. souřadnic. Z tohoto důvodu se vyplatí přemýšlet o bázích ne jako o množinách vektorů (kde nezáleží na pořadí), ale o uspořádaných n-ticích (na přednášce se také používá pojem *seznam vektorů*). Seznamu vektorů, který je LN a generující se na přednášce říká *uspořádaná báze*.

Úmluva. Odteď když řeknu na cvičení *báze*, tak budu mít na myslí uspořádanou bázi. Budu se to v definicích snažit připomínat, ale třeba občas zapomenu. Pro přehlednost budu uspořádané báze značit velkými psacími písmeny. Např. $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Definice. Buď L lineární prostor nad T a nechť $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je jeho (uspořádaná) báze. Pro libovolný prvek $\vec{v} \in L$ definujeme jeho **souřadnicový vektor** v bázi $\mathscr{X}$ jako

$$\textsf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n, \qquad \text{kde} \qquad \vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n.$$

Cvičení 3.6. Uvažujme lineární prostor polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, tj.

$$\mathbb{R}^{\leq 2}[x] = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Najděte souřadnice polynomu $p(x) = -3x^2 + 7x + 10$ v bázi

a) $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$,
b) $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, kde $f_1(x) = -2x^2 + x + 1$, $f_2(x) = 2x - 1$, $f_3(x) = x^2 + 3$.

Řešení

1. ano, ano, ne, ano, ano, ano, ne, ne, ano
2. LZ, LN, LN, LN, LZ, LN
3. ano, ano, ne, ano, ano, ne
4. 2
5. n
6. $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$