Cvičení 4

Báze, dimenze, souřadnice

Dnes budeme především procvičovat pojmy báze, dimenze, souřadnice zavedené na minulém cvičení. Opět začínáme nepovinným domácím úkolem.

Cvičení 4.1. (Nestihli jsme na cvičení.) Najděte souřadnice polynomu $p(x) = -3x^2 + 7x + 10 \in \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ v bázi $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, kde

$$f_1(x) = -2x^2 + x + 1, \qquad f_2(x) = 2x - 1, \qquad f_3(x) = x^2 + 3.$$

Tvrzení. (Vlastnosti báze a dimenze) Buď L lineární prostor dimenze n. (Tj. takový, ve kterém existuje lineárně nezávislá generující množina o n prvcích.) Potom platí:

- Každá další báze (LN generující množina) má taky n prvků.
- Každá množnina, která má více než n prvků je lineárně závislá.
- Žádná množina, která má méně než n prvků není generující.
- Množina, která má právě n prvků je lineárně nezávislá, právě když je generující.
- Jestliže $V \subseteq W$ (resp. $V \subsetneq W$) podprostory L, pak $\dim V \leq \dim W$ (resp. $\dim V < \dim W$).
- Jestliže $V \subseteq W$ (podprostory L) a $\dim V = \dim W$, pak $V = W$.

Cvičení 4.2. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ seznam $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, kde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Je tento seznam lineárně nezávislý?
b) Je tento seznam generující?

Cvičení 4.3. Uvažujme lineární podprostor $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \vec{x}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cíl tohoto cvičení je najít bázi a určit dimenzi V. Budeme posutpovat takto:

a) Rozhodněte, zda množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ generuje V.
b) Rozhodněte, zda je množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ lineárně nezávislá. Je to báze V?
c) Rozhodněte, zda $\vec{x}_3 \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Rozhodněte, zda $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ generuje V.
e) Rozhodněte, zda je množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ lineárně nezávislá? Je to báze V?
f) Jaká je dimenze V?
g) Určete souřadnice vektorů $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ a $\vec{x}_3$ v nalezené bázi.

Tvrzení. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Je-li množina $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subset L$ lineárně závislá, pak v ní existuje nějaký vektor $\vec{x}_i$, jenž je lineární kombinací ostatních.

Tvrzení. (Výběr báze z generující množiny) Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $G = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ generuje L. Pak existuje podmnožina $B \subset G$, jež je bází L.

Cvičení 4.4. V $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ označme $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi V a určete dimenzi V.

Lineární zobrazení

Definice. Buďte V, W lineární prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ se nazývá **lineární**, jestliže je

- *aditivní*, tj. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)\ \mathbf{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})$ a
- *homogenní*, tj. $(\forall \alpha \in \mathbb{F})\ (\forall \vec{x} \in V)\ \mathbf{f}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x})$.

Finta. Stačí ověřit, že pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $\mathbf{f}(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})$.

Cvičení 4.5. Určete, které z následujících zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární.

a) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y+2 \end{pmatrix}$ e) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$ f) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Poznámka. Ze střední školy znáte pojem *lineární funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což byla funkce daná předpisem $f(x) = ax + b$. Tyto funkce u nás *nebudeme považovat za lineární*, pokud neplatí $b = 0$.

Pozorování. Je-li $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V, pak je libovolné lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ jednoznačně určené svojí akcí na bázi $\mathbf{f}(\vec{x}_1), \ldots, \mathbf{f}(\vec{x}_n)$. Vskutku: chceme-li znát obraz libovolného $\vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n$, stačí spočítat $\mathbf{f}(\vec{y}) = \alpha_1\mathbf{f}(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\vec{x}_n)$.

Značení. Lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ budeme zapisovat ve tvaru **matice** $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\vec{e}_1 \cdots \mathbf{A}\vec{e}_s)$, kde $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s$ je kanonická báze $\mathbb{R}^s$.

Cvičení 4.6. Určete matice lineárních zobrazení z předchozího cvičení.

Cvičení 4.7. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete, jak toto zobrazení působí na obecný vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Řešení

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. ne, ano

3. ano, ne, ano, ano, ano, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. např. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4\}$

5. ano, ne, ano, ne, ne, ano

6. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} x+2y-2z-u \\ 2x+4y+z+3u \\ -x-2y-u \end{pmatrix}$