Cvičení 5

Začneme domácím úkolem, ve kterém jste se naučili *dopnění lineárně nezávislé množiny na bázi.* Můžete si sami zkusit obecně dokázat následující tvrzení.

Tvrzení. Nechť $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je lineárně nezávislá množina. Předpokládejme navíc, že není generující, tj. existuje vektor $\vec{y} \notin \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, pak je nově utvořená množina $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y})$ rovněž lineárně nezávislá.

Věta. (Doplnění lineárně nezávislého seznamu na bázi) Buď $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ lineárně nezávislý seznam v L nad T. Potom existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ tvoří bázi L.

Cvičení 5.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ vektory

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ generující (zda generuje celé $\mathbb{R}^3$). (*Návod:* Zkuste na to přijít bez počítání!)
b) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ lineárně nezávislý.
c) Určete dimenzi $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Doplňte tento seznam na bázi $\mathbb{R}^3$, tj. najděte bázi $\mathbb{R}^3$ obsahující vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$. (*Návod:* Označíme-li $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektory kanonické báze, pak je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ určitě generující. Vybrat bázi z generujícího seznamu umíme z minulého cvičení.)
e) Najděte souřadnice vektorů $\vec{y}_1$ a $\vec{y}_2$ v bázi, kterou jste právě nalezli.
f) Rozhodněte zda platí $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$. (Zkuste využít předchozí výpočty.)

Lineární zobrazení

Cvičení 5.2. Popište slovy následující lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cvičení 5.3. Najděte matici zrcadlení podél přímky $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Cvičení 5.4. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete, jak matice působí na obecný vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
b) Najděte všechna řešení rovnice $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
c) Rozhodněte, zda daná množina řešení tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, jaká je jeho dimenze?
d) Uvažujme lineární obal sloupečků matice $\mathbf{A}$, tj. $V := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Najděte bázi V a určete dimenzi V.
e) Ukažte, že V je ve skutečnosti obor hodnot (tzv. *obraz*) zobrazení $\mathbf{A}$, tj. $V = \{\mathbf{A}\vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$.

Definice. Buď $\mathbf{f}\colon V \to W$ lineární zobrazení. Definujeme **jádro** tohoto zobrazení jako

$$\ker \mathbf{f} = \{\vec{x} \in V \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}\}.$$

Platí, že jádro je vždy lineární podprostor $\ker \mathbf{f} \subset V$. Dimenze jádra jako vektorové prostoru se nazývá **defekt** zobrazení $\mathbf{f}$; značíme $\operatorname{def} \mathbf{f} = \dim \ker \mathbf{f}$.

Definice. Buď $\mathbf{f}\colon V \to W$ lineární zobrazení. Definujeme **obraz** tohoto zobrazení jako

$$\operatorname{im} \mathbf{f} = \{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V\}.$$

Platí, že obraz je vždy lineární podprostor $\operatorname{im} \mathbf{f} \subset W$. Dimenze obrazu jako vektorového prostoru se nazývá **hodnost** zobrazení $\mathbf{f}$; značíme $\operatorname{rank} \mathbf{f} = \dim \operatorname{im} \mathbf{f}$.

Cvičení 5.5. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete, jak toto zobrazení působí na obecný vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Cvičení 5.6. Najděte jádro a defekt zobrazení $\mathbf{A}$ z předchozího cvičení.

Cvičení 5.7. Najděte obraz a hodnost zobrazení $\mathbf{A}$ z předchozích cvičení.

Řešení

1. ne; ano; 2; $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_2)$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ano
2. roztažení $2\times$ ve směru x; zkosení osy y; otočení o 45° a zároveň dvojnásobné zvětšení; průmět na osu x; průmět na osu $x = y$; zrcadlení podle osy y
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} x+2y-z \\ -y-z \\ x-3z \\ x+3y \end{pmatrix}$; $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; ano; $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, 2
5. $\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} x+2y-2z-u \\ 2x+4y+z+3u \\ -x-2y-u \end{pmatrix}$
6. $\ker \mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{def} \mathbf{A} = 2$
7. $\operatorname{im} \mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$