Cvičení 6

Cvičení 6.1. Uvažujme následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte všechna možná maticová násobení mezi dvojicemi matic, která provést lze. (Tj. rozhodněte, zda lze vynásobit $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{BA}$ a podobně a součin případně skutečně proveďte.) Jakým zobrazením (mezi jakými prostory) jednotlivé matice odpovídají? Jakému zobrazení odpovídá jejich součin?

Mono-, epi-, izo-morfismy

Cvičení 6.2. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete vzor vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tj. najděte všechny vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ takové, že $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{v}$. Je řešení jednoznačné?

Definice. Lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ se nazývá

- **monomorfismus**, jestliže je prosté, což platí právě tehdy když $\ker \mathbf{f} = \{\vec{o}\}$, což platí právě tehdy, když $\operatorname{def} \mathbf{f} = 0$
- **epimorfismus**, jestliže je na, tj. $\operatorname{im} \mathbf{f} = W$, což platí právě tehdy, když $\operatorname{rank} \mathbf{f} = \dim W$.
- **izomorfismus**, jestliže splňuje obě podmínky.

Cvičení 6.3. U následujících matic rozhodněte, zda jde o monomorfismus, epimorfismus nebo izomorfismus.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Pozorování. Pro matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ platí

- $\mathbf{A}$ je monomorfismus právě tehdy, když má lineárně nezávislé sloupečky (což může nastat jen tehdy, když $s \leq r$),
- $\mathbf{A}$ je epimofismus právě tehdy, když její sloupečky generují $\mathbb{R}^s$, (což může nastat jen tehdy, když $s \geq r$),
- $\mathbf{A}$ je izomorfismus právě tehdy, když její sloupečky tvoří bázi $\mathbb{R}^s$ (což může nastat jen tehdy, když $r = s$, tj. $\mathbf{A}$ je čtvercová matice).

Pozorování. Čtvercová matice je monomorfismus právě tehdy, když je epimorfismus.

Inverzní matice

Definice/Tvrzení. Buďte X, Y libovolné množiny, $f\colon X \to Y$ libovolné zobrazení. Zobrazení g se nazývá **inverzní** k f, jestliže $f \circ g = \mathrm{id} = g \circ f$, tj. jestliže $f(g(y)) = y$ pro každé $y \in Y$ a $g(f(x)) = x$ pro každé $x \in X$. Inverzní zobrazení existuje právě tehdy, když f je bijekce. V tom případě je dané jednozačně a značí se f^{-1}.

Tvrzení. Nechť $\mathbf{f}\colon V \to W$ je bijektivní lineární zobrazení. Potom $\mathbf{f}^{-1}\colon W \to V$ je rovněž lineární.

Cvičení 6.4. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte inverzi $\mathbf{A}^{-1}$. Ověřte výsledek pomocí maticového násobení $\mathbf{AA}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}\vec{v}$.

Matice lineárního zobrazení v bázi

Pozorování. Derivace je lineární zobrazení na lineárním prostoru všech funkcí. Můžeme také zavést derivaci jako lineární operátor $D\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, jenž zobrazuje

$$\mathbf{D}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^n$$

Tento operátor rovněž můžeme zúžit na prostor polynomů stupně nejvýše n a dostat $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq n}[x] \to \mathbb{R}^{\leq n}[x]$.

Cvičení 6.5. Uvažujme operátor derivace $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$

a) Určete, obrazy vektorů kanonické báze $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$

$$e_1(x) = 1, \qquad e_2(x) = x, \qquad e_3(x) = x^2.$$

b) Určete souřadnice těchto obrazů opět v kanonické bázi $\mathscr{E} = (e_1(x), e_2(x), e_3(x))$.
c) Najděte bázi obrazu $\mathbf{D}$ a určete hodnost $\mathbf{D}$.
d) Najděte jádro $\mathbf{D}$ a určete defekt $\mathbf{D}$.

Definice. Buďte V, W lineární prostory a $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$ resp. $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_s)$ jejich báze. Pro libovolné lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ pak definuji jeho matici bázích $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$ jako

$$\mathbf{f}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{Y}} = (\mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\, \mathbf{f}(\vec{x}_1) \cdots \mathbf{coord}_{\mathscr{Y}}\, \mathbf{f}(\vec{x}_s)).$$

Cvičení 6.6. Najděte matici operátoru derivování $\mathbf{D}\colon R^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ ve standardní bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$.

Řešení

1. $\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} -15 & -6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
   $\mathbf{BD} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 15 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\mathbf{BE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
   $\mathbf{CB} = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 12 & 9 \\ -14 & -2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
   $\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 13 & -11 & 27 \\ -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
   $\mathbf{CE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
   $\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -33 & -11 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
   $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
2. $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, ano
3. epi, mono, nic, izo
4. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{D}e_1(x) = 0$, $\mathbf{D}e_2(x) = 1$, $\mathbf{D}e_3(x) = 2x$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{im} \mathbf{D} = \operatorname{span}\{1, x\}$, $\operatorname{rank} \mathbf{D} = 2$; $\ker \mathbf{D} = \operatorname{span}\{1\}$, $\operatorname{def} \mathbf{D} = 1$
6. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$