Cvičení 10

Tvrzení. (Rozvoj determinantu podle řádku/sloupce) Uvažujme čtvercovou $n \times n$ matici $\mathbf{A}$. Zvolíme-li řádek $k \in \{1, \dots, n\}$, lze determinant A vyjádřit jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{kj} D_{kj},$$

kde D_{kj} jsou tzv. *algebraické doplňky* matice $\mathbf{A}$. Podobně můžeme rozvinout determinant podle l-tého sloupce, $l \in \{1, \dots, n\}$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{A}_{il} D_{il}.$$

Cvičení 10.1. Spočítejte determinant metodou rozvoje podle řádku/sloupce

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Tvrzení. (Vlastnosti determinantu)

- Determinant není lineární: $\det(A+B)$ se nemusí rovnat $\det A + \det B$. Stejně tak $\det(\alpha A)$ se nemusí rovnat $\alpha \det A$.
- Determinant je multiplikativní: $\det(AB) = \det A \det B$.
- Determinant je multilineární ve sloupcích a řádcích. Speciálně platí $\alpha \det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}}$, jestliže $\tilde{A}$ vznikla z $\mathbf{A}$ vynásobením jednoho řádku/sloupce číslem α.
- Determinant se nemění přičtením násobku řádku (resp. sloupce) k jinému řádku (resp. sloupci), tj. platí $\det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}}$, kde $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla z $\mathbf{A}$ přičtením α-násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému.
- Při prohazování řádků/sloupců determinant mění pouze znaménko, tj. $\det \mathbf{A} = -\det \tilde{A}$, kde $\tilde{A}$ vznikla z $\mathbf{A}$ prohozením dvou řádků (sloupců).
- Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

V důsledku lze determinanty počítat pomocí Gaussovy eliminace.

Cvičení 10.2. Spočítejte determinant pomocí Gaussovy eliminace

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 10.3. Spočítejte determinant. (Libovolným způsobem, šikovná je kombinace různých metod.)

$$\det \begin{pmatrix} -12 & 4 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 3 & 1 & 0 \\ 26 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Věta. (Frobenius) Buď $\mathbf{A}\colon T^s \to T^r$ matice a $\vec{b} \in T^r$ vektor. Soustave $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ má řešení právě tehdy, když $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \vec{b})$. Množinu řešení S lze napsat jako $S = \vec{x}_p + S_0$, kde

$$S_0 = \{\vec{x}_0 \mid \mathbf{A}\vec{x}_0 = \vec{o}\} = \ker \mathbf{A}$$

je množina všech řešení bez pravé strany a $\vec{x}_p$ je jakékoliv (konkréntní, tzv. *partikulární*) řešení.

Důsledek. Soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ má právě jedno řešení právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární matice, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Toto řešení lze pak psát ve tvaru $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$.

Cvičení 10.4. Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^3 \end{aligned}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru λ má soustava právě jedno řešení?
b) Najděte všechna řešení soustavy v závislosti na parametru λ.

Řešení

1. -70
2. 160
3. 490
4. $\lambda \neq 1, -2$: $\left\{ \frac{1}{\lambda+2} \begin{pmatrix} -\lambda^2+\lambda+1 \\ 1-\lambda^2 \\ \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix} \right\}$
   $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
   $\lambda = -2$: nemá řešení