Cvičení 11

Soustavy rovnic, Cramerovo pravidlo

Připomeňme si, že soustava n lineárních rovnic o n neznámých lze zapsat ve tvaru $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je čvercová matice soustavy a $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$ je vektor pravých stran. Taková soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární matice, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ono řešení se dá spočítat vyjádřit pomocí inverzní matice jako $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$.

Věta. (Cramerovo pravidlo) Buďte $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ čtvercová matice a $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$ sloupcový vektor. Jednotlivé složky řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det(\mathbf{A}_{\bullet 1} \cdots \mathbf{A}_{\bullet j-1}\, \vec{b}\, \mathbf{A}_{\bullet j+1} \cdots \mathbf{A}_{\bullet n}).$$

Cvičení 11.1. Spočítejte x-ovou složku průniku následujících rovin v $\mathbb{R}^3$

$$x + y + 2z = 3, \quad -x + y - z = 0, \quad x + 3z = 1.$$

Cvičení 11.2. Spočítejte částečně pomocí Cramerova pravidla všechna řešení následující soustavy v závislosti na parametru β

$$\begin{aligned} \beta x + y + z &= \beta \\ \beta x + \beta y + z &= \beta \\ \beta x + \beta y + \beta z &= \beta \end{aligned}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice. Buď V lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $\mathbf{f}\colon V \to V$ je lineární operátor. Řekneme, že nenulový vektor $\vec{x} \in V$ je **vlastním vektorem** zobrazení $\mathbf{f}$ příslušný **vlastnímu číslu** $\lambda \in \mathbb{F}$, jestliže platí $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Pozorování. Číslo $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastní číslo $\mathbf{f}$ právě tehdy, když je kořenem tzv. **charakteristického polynomu** $p_{\mathbf{f}}(\lambda) = \det(\mathbf{f} - \lambda\mathbf{E})$.

Cvičení 11.3. Najděte všechna vlastní čísla a příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení. Množina všech vlastních vektorů příslušných danému vlastnímu číslu λ doplněná o nulový vektor je vždy lineární podprostor V. Říká se mu **vlastní podprostor**.

Cvičení 11.4. Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Najděte bázi $\mathbb{R}^3$ tvořenou vlastními vektory matice $\mathbf{A}$. Označme nalezenou bázi $\mathscr{X}$.
b) Vyjádřete lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ popsané výše uvedenou maticí pomocí matice v bázi $\mathscr{X}$. Tj. najděte matici $\mathbf{A}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}}$.
c) Najděte rovněž matice transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$, $\mathbf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}}$.

Výše naznačený postup se nazývá *diagonalizace* matice $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže existuje báze $\mathbb{F}^n$ tvořená vlastními vektory $\mathbf{A}$. V takovém případě můžeme psát $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$, kde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n),$$

přičemž $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\mathbf{A}$ a $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou příslušné vlastní vektory.

Řešení

1. $x = 2$

2. $\beta \neq 0, 1$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\beta = 0$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\beta = 1$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

3. $\lambda = 2$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = 3$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

4. Např. $\mathscr{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
$\mathbf{A}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$