Cvičení 12

Připomeňme si proces *diagonalizace* matice. Matice $\mathbf{A}\colon T^n \to T^n$ se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže existuje báze $\mathbb{F}^n$ tvořená vlastními vektory $\mathbf{A}$. V takovém případě můžeme psát $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$, kde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n),$$

přičemž $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\mathbf{A}$ a $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou příslušné vlastní vektory.

Proces diagonalizace může selhat ze dvou důvodů, které si ilustrujeme v následujících příkladech.

Cvičení 12.1. Uvažujme matici otočení o devadesát stupňů $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte její vlastní čísla a vlastní vektory (nad $\mathbb{R}$). Je toto zobrazení diagonalizovatelné? Šla by matice diagonalizovat, kdybychom ji uvažovali jako zobrazení $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ (nad $\mathbb{C}$)?

Cvičení 12.2. Uvažujme operátor derivace $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Najděte jeho vlastní čísla a vlastní vektory. Je tento operátor diagonalizovatelný?

Řešení

1. Nad $\mathbb{R}$ nemá žádné vl. čísla a vektory. Nad $\mathbb{C}$ jsou vl.č. $\lambda = \pm i$ přísl. vl. v. $\left(\begin{smallmatrix} \mp i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Čtyřnásobné vl. č. $\lambda = 0$ má pouze jednorozměrný vl. podpr. $\operatorname{span}\{1\}$.