# Cvičení 13

**Definice.** Buď $L$ lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. **Skalární součin** je zobrazení $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon L\times L\to\mathbb{R}$, které je

- symetrické: $\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$ pro každé $\vec{x},\vec{y}\in L$,
- lineární v druhém argumentu: $\langle\vec{x}|\alpha\vec{y}+\vec{z}\rangle=\alpha\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle$ pro každé $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in L$, $\alpha\in T$,
- pozitivně definitní: $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle>0$ pro každé $\vec{o}\neq\vec{x}\in L$.

Číslo $\|\vec{x}\|:=\sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}$ nazýváme **norma**[1] vektoru $\vec{x}\in L$ – je to jakési vyjádření jeho délky či velikosti. Definujeme rovněž **vzdálenost** dvou vektorů $d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{y}-\vec{x}\|$. Dva vektory $\vec{x},\vec{y}\in L$ nazveme **ortogonální** (kolmé), jestliže $\langle x|y\rangle=0$. Obecně můžeme definovat **úhel**, který dva vektory svírají jako

$$\varphi=\arccos\frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

V $\mathbb{R}^n$ definujeme standardní skalární součin jako $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

**Poznámka.** V důsledku symetrie je skalární součin lineární i v prvním argumentu. Jedná se tedy o tzv. bilineární symetrickou formu. Ovšem pozor, toto platí jen nad tělesem $\mathbb{R}$.

Nad tělesem $\mathbb{C}$ se skalární součin se místo symetrie předpokládá tzv. hermitovskost: $\langle y|x\rangle=\overline{\langle x|y\rangle}$. V důsledku skalární součin není v prvním argumentu lineární, ale tzv. antilineární: $\langle\alpha x+y|z\rangle=\bar{\alpha}\langle x|z\rangle+\langle y|z\rangle$. Všude, kde se v přednášce vyskytuje *transponovaná matice* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, je nutné místo toho použít *hermitovsky sdruženou matici*, která se značí všelijak, ale nejčastěji asi $\mathbf{A}^*$ nebo $\mathbf{A}^\dagger$ a jedná se o transponovanou a zároveň komplexně sdruženou matici $\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$.

**Cvičení 13.1.** Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Spočítejte velikost vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$, jejich vzájemnou vzdálenost a úhel, který svírají.

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$

**Definice.** Báze $\mathscr{X}=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ lineárního prostoru se skalárním součinem $L$ se nazývá **ortogonální**, jestliže jsou všechny vektory v bázi vzájemně ortogonální, tj. $\langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle=0$ pro $i\neq j$. Báze se nazývá **ortonormální**, jestliže mají navíc všechny vektory báze normu 1, tj. $\langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle=\delta_{ij}$.

**Věta.** Nechť $L$ je lineární prostor se skalárním součinem a $\mathscr{X}=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ ortogonální báze. Potom lze souřadnice libovolného vektoru $\vec{v}\in L$ vyjádřit jako

$$[\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\,\vec{v}]_j=\frac{1}{\|\vec{x}_j\|^2}\langle\vec{x}_j|\vec{v}\rangle.$$

Je-li $\mathscr{X}$ ortonormální, pak se vzorec ještě více zjednoduší:

$$[\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\,\vec{v}]_j=\langle\vec{x}_j|\vec{v}\rangle.$$

**Cvičení 13.2.** Uvažujme prostor $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Rozhodněte, zde je báze $\mathscr{X}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ ortonormální nebo ortogonální, kde

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\qquad\vec{x}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad\vec{x}_3=\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}.$$

[1] Přesněji řečeno, je to norma indukovaná daným skalárním součinem. Pojem *norma* je v matematice obecnější a zahrnuje i zobrazení s podobnými vlastnostmi, které však uvedeným způsobem pomocí žádného skalárního součinu vyjádřit nelze. S těmi se můžete setkat například v numerické matematice.

Najděte souřadnice vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ v této bázi.

**Tvrzení/Definice.** Buď $L$ lineární prostor se skalárním součinem, nechť $W$ je lineární podprostor $L$. Potom pro libovolný vektor $\vec{v} \in L$ existuje jednoznačný rozklad $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$, kde $\vec{x} \in W$ a $\langle x | y \rangle = 0$. Vektor $\vec{x}$ značíme $\operatorname{proj}_W \vec{v}$ a nazýváme **ortogonální průmět** či **ortogonální projekce** $\vec{v}$ do podprostoru $W$. Vektor $\vec{y}$ pak nazýváme **ortogonální rejekce**. Zobrazení $\vec{v} \mapsto \operatorname{proj}_W \vec{v}$ je lineární a nazýváme **ortogonální projektor**.

Nyní by nás mohly zajímat způsoby výpočtu ortogonální projekce či projektoru. Nejprve se můžeme zamyslet nad speciálním případem, kdy $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ortogonální báze a $W = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ pro nějaké $k < n$. V tomto případě je zřejmé, že $\operatorname{proj}_W \vec{x}_i = \vec{x}_i$ pro $i \leq k$ a $\operatorname{proj}_W \vec{x}_i = \vec{o}$ pro $i > k$. Pro obecný vektor $\vec{v}$ tedy stačí najít jeho souřadnice v bázi $\mathscr{X}$ (k čemuž můžeme využít větu výše) a projekci spočítat tak, že budeme uvažovat jenom jeho prvních $k$ souřadnic. Máme

$$\vec{v} = \frac{\langle \vec{x}_1 | v \rangle}{\|\vec{x}_1\|^2} \vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{x}_2 | v \rangle}{\|\vec{x}_2\|^2} \vec{x}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{x}_n | v \rangle}{\|\vec{x}_n\|^2} \vec{x}_n.$$

Po zapůsobení projektorem dostaneme

$$\operatorname{proj}_W \vec{v} = \frac{\langle \vec{x}_1 | v \rangle}{\|\vec{x}_1\|^2} \vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{x}_2 | v \rangle}{\|\vec{x}_2\|^2} \vec{x}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{x}_k | v \rangle}{\|\vec{x}_k\|^2} \vec{x}_k. \tag{$*$}$$

Všimněte si, že pro praktický výpočet ortogonální projekce podle vzorce $(*)$ vlastně nemusíme znát ortogonální bázi celého prostoru $L$. Stačí znát ortogonální bázi podprostoru $W$.

**Cvičení 13.3.** Pro situaci z předchozího cvičení najděte průmět vektoru $\vec{v}$ do roviny $W = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.

Pro situaci, kdy neznáme ortogonální bázi $W$ můžeme využít tvrzení z přednášky.

**Tvrzení.** Uvažujme lineární prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem, $W \subset \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ je báze $W$ (ne nutně ortogonální). Označme $\mathbf{A} = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_k)$ matici, jejíž sloupečky jsou vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$. Potom lze matici ortogonální projekce na $W$ zapsat ve tvaru

$$\operatorname{proj}_W = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

**Cvičení 13.4.** Uvažujme v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem rovinu $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte průmět vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ do roviny $V$.

# Řešení

1. a) $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \sqrt{5}$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$,
   $\varphi = \pi/2$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{10}$;
   b) $\|\vec{x}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{6}$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2$,
   $\cos\varphi = \sqrt{2}/3$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{6}$;
   c) $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{7}$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 3$,
   $\cos\varphi = 3/\sqrt{42}$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{7}$

2. Je ortogonální, není ortonormální; $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $\mathrm{proj}_W\, \vec{v} = 3\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\mathrm{proj}_W = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,
   $\mathrm{proj}_W\, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$