Domácí úkol 1 – řešení

1. Převeďte následující soustavu na maticový tvar a vyřešte pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

V první vlnovce jsme prohodili první dva řádky, a pak jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku od druhého a trojnásobek prvního řádku od třetího. V druhé vlnovce jsme druhý řádek vydělili třemi a pak jsme jeho pětinásobek odečetli od posledního.

Zpětná substituce nám dá $z = 2$, $y = -1$, $x = 1$.

2. Napište vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Část (a) je zřejmá: vektor se dá zapsat jako $\vec{v} = 0\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

V části (b) řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ta se dá zapsat jako soustava tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha \phantom{{}-\beta} + 3\gamma = -2 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = -2 \end{cases}$$

Až naberete trochu zkušeností, budete rovnou psát matici soustavy, jež má ve sloupečcích vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ a na pravé straně vektor $\vec{v}$. Matice se pak dá opět upravit pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

V zadání jsme nechtěli, abyste našli všechny možné způsoby, jak vektor napsat jako lineární kombinaci. Chtěli jsme pouze, abyste našli nějaký. Stačí teda najít jedno řešení soustavy. Položíme-li $\gamma = 0$, můžeme dopočítat $\beta = -4$, $\alpha = -2$, čili $\vec{v} = -2\vec{x}_1 - 4\vec{x}_2$.

Kdo se pokoušel hledat všechna řešení, dají se napsat parametricky třeba takto: $\gamma = t$, $\beta = -4 - 5t$, $\alpha = -2 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Pokuste se zformulovat definici pojmu *přímka*.

Zde pochopitelně neexistuje jednoznačné řešení. Podstatné je, aby formální definice měla všechny náležitosti. Především by se tam někde mělo objevit něco jako *přímka je množina bodů* a dále byste měli charakterizovat jakých přesně bodů.

Zda byla vaše definice *správná* je ošemetné tvrdit. Podstatné je především to, aby byla srozumitelná. To byl cíl tohoto domácího úkolu. Jinak si můžete definovat v zásadě co chcete, pokud jsme si to na lineární algebře již nedefinovali jinak. Na písemce po vás budeme vždy chtít definovat jen pojmy, které znáte z přednášky, a budeme očekávat, že napíšete přesně onu definici z přednášky či aspoň nějakou ekvivalentní.

Já bych definici přímky formuloval asi takto:

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. *Přímka* je množina bodů tvaru

$$\{\vec{a} + t\vec{x} \mid t \in \mathbb{F}\},$$

kde $\vec{a}, \vec{x}$ jsou nějaké vektory z L takové, že $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Vy jste patrně místo obecného lineárního prostoru L pracovali v $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^3$ nebo $\mathbb{R}^2$, ale jinak by definice mohla vypadat úplně stejně. Pokud jste pracovali v $\mathbb{R}^2$, tak jste občas místo parametrického vyjádření volili vyjádření pomocí lineární rovnice. Tedy něco jako:

Definice. *Přímka* v rovině je množina bodů tvaru

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou nějaká čísla taková, že a a b nejsou současně rovny nule.

Nebo třeba

Definice. *Přímka* v $\mathbb{R}^2$ je množina bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících rovnici $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou nějaká pevně zvolená čísla taková, že a a b nejsou současně rovny nule.