Domácí úkol 2 – řešení

1. Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{cases} 23x - 46y + 17z = 6 \\ 9x - 18y + 14z = -5 \\ 22x - 44y + 27z = -5 \end{cases}$$

Napíšeme matici soustavy a řešíme Gaussovou eliminací.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 23 & -46 & 17 & 6 \\ 9 & -18 & 14 & -5 \\ 22 & -44 & 27 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & 11 \\ 9 & -18 & 14 & -5 \\ 22 & -44 & 27 & -5 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 104 & -104 \\ 0 & 0 & 247 & -247 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Práci ušetří především první úprava, kde od prvního řádku odečteme poslední a vytvoří se nám jednička v *pivotovací* pozici, čímž můžeme snadno vynulovat pozice pod ní. Dořešíme zpětnou eliminací. Z druhého řádku plyne $z = -1$. Na prvním řádku máme "dlouhý schod", čili můžeme si zvolit jednu proměnnou libovolně, třeba $y = t$ a dopočítat $x = 1 + 2t$.

2. Rozhodněte, zda $\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ptáme se, zda existují $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{v} = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3$. Jinými slovy nás zajímá, zda má následující soustava řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení evidentně má. (Dokonce nekonečně mnoho. Jedno z nich je třeba $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.) Závěr tedy je, že vektor $\vec{v}$ do daného lineárního obalu **patří**.

3. Rozhodněte, zda následující množina tvoří lineární podprostor $\mathbb{R}[x]$

a) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{stupeň } p(x) \text{ je sudý}\} \cup \{o(x)\}$, (zde $o(x)$ značí nulový polynom)
b) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{koeficienty u lichých mocnin v } p(x) \text{ jsou nulové}\}$

V části (a) množina **netvoří** lineární podprostor, protože není uzavřená na sčítání. Například polynomy $p(x) = x^2$ a $q(x) = x - x^2$ mají oba sudý stupeň a patří tedy do množiny. Nicméně jejich součet $p(x) + q(x) = x$ má lichý stupeň a do množiny tedy nepatří.

V případě (b) množina lineární podprostor tvoří. Vskutku: vezměme dva libovolné prvky množiny $p(x)$ a $q(x)$. Označme jejich koeficienty takto:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{2n},$$
$$q(x) = \beta_0 + \beta_1 x^2 + \cdots + \beta_n x^{2n}.$$

(Netvrdíme, že α_n a β_n jsou nenulové. Polynomy klidně mohou mít různé stupně.) Potom i jejich lineární kombinace

$$p(x) + \gamma q(x) = (\alpha_0 + \gamma\beta_0) + (\alpha_1 + \gamma\beta_1)x^2 + \cdots + (\alpha_n + \gamma\beta_n)x^{2n}$$

patří do dané množiny. Množina tedy **je** lineární podprostor.