Domácí úkol 3

Toto je povinný domácí úkol, který prosím přineste na příští cvičení 16., 17 10. Pokud se na cvičení nemůžete dostavit, pošlete prosím úkol mailem.

1. Rozhodněte, zda je množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislá, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. Rozhodněte, zda seznam vektorů $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Pro nějaké pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$, uvažujme následující lineární podprostor $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$:

$$V_n = \{p(x) \mid \text{stupeň } p(x) \text{ je nejvýše } 2n \text{ a koeficienty u lichých mocnin jsou nulové}\},$$

tedy

$$V_n = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{2n} \mid \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x].$$

Najděte dimenzi V_n.

Nápověda: Ověřte, že $\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}\}$ je báze V_n. Pokud vám dělá potíže pracovat obecně, zkuste ověřit aspoň třeba pro $n = 3$.