Domácí úkol 3 – řešení

1. Rozhodněte, zda je množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislá, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Při ověřování lineární nezávislosti řešíme soustavu dovnic $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0}$. Dáme tedy vektory do matice a upravíme na horní blokový tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení nás nezajímá. Zajímá nás pouze, zda je jednoznačné, nebo ne. Zde jednoznačné není, neboť se nám po úpravě objevil „dlouhý schod“. Množina je tedy **lineárně závislá**.

2. Rozhodněte, zda seznam vektorů $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aby seznam $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ vůbec mohl být bází, musí mít tolik prvků, kolik je dimenze $\mathbb{R}^3$. Dimenze $\mathbb{R}^3$ je tři a $\mathscr{Y}$ má právě tři prvky, čili tato nutná podmínka je splněna. Za těchto okolností stačí ověřit, že je seznam lineárně nezávislý. To, že je generující pak už plyne automaticky.

Ověříme tedy lineární nezávislost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soustava má právě jedno řešení, seznam $\mathscr{Y}$ je tedy lineárně nezávislý, a tedy **tvoří bázi**.

3. Pro nějaké pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$, uvažujme následující lineární podprostor $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$:

$$V_n = \{p(x) \mid \text{stupeň } p(x) \text{ je nejvýše } 2n \text{ a koeficienty u lichých mocnin jsou nulové}\},$$

tedy

$$V_n = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{2n} \mid \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x].$$

Najděte dimenzi V_n.

Abychom mohli určit dimenzi V_n, musíme najít bázi tohoto prostoru. Tvrdíme, že báze je množina $\{1, x^2, \ldots, x^{2n}\}$. Vskutku: Zjevně platí $V_n = \operatorname{span}\{1, x^2, \ldots, x^{2n}\}$ (takto jsme tu množinu definovali; mimochodem toto zároveň dokazuje, že V_n je opravdu lineární prostor – podprostor $\mathbb{R}[x]$). Zbývá ukázat, že je tato množina lineárně nezávislá. To však už plyne z toho, že víme, že $\{1, x, x^2, \ldots, x^{2n}\}$ je lineárně nezávislá množina (je to báze $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$) – když z LN množiny ubereme pár vektorů, bude určitě pořád LN.

Pro pořádek si to však můžeme ukázat přímo: Ptáme se, zda lze nakombinovat nulový polynom z výše uvedených netriviálním způsobem. Řešíme tedy rovnici

$$\alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{2n} = 0.$$

Dva polynomy se (z definice) rovnají tehdy a jen tehdy, když se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin. Zde to znamená, že $0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n$, což jsme chtěli dokázat.

Protože nalezená báze $\{1, x^2, \ldots, x^{2n}\}$ má $n + 1$ prvků, ukázali jsme, že $\dim V_n = n + 1$.