Domácí úkol 6 – řešení

1. *(5 b.)* Rozhodněte, zda následující množina tvoří lineární podprostor $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \, 2a + b - c + 6d = 5 \right\}.$$

Správná odpověď je, že množina lineární podprostor *netvoří.* Dá se to zdůvodnit různými způsoby.

Nejjednodušší je všimnout si, že nulový vektor není prvkem množiny. Fakt: $2 \cdot 0 + 0 - 0 + 6 \cdot 0 = 0 \neq 5$, tj. nulový vektor nesplňuje zadanou rovnici.

Alternativní způsob: Najdeme nějaký prvek. Třeba vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Jsou i jeho násobky prvkem množiny? Evidentně ne...

Ještě jiný způsob: Můžeme si vzít obecný prvek množiny $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ a ptát se, zda jsou jeho násobky $\alpha\vec{v}$ prvky množiny. No opět evidentně pro každé $\alpha \neq 1$ to nebude prvek množiny, protože $2\alpha a + \alpha b - \alpha c + 6\alpha d = 5\alpha \neq 5$.

Stejnou úvahu můžeme provést, vezmeme-li dva vektory z množiny a snažíme se je sečíst.

2. *(5 b.)* Definujte pojmy *báze* a *souřadnice vektoru v bázi.* (Další použité pojmy definovat nemusíte.)

Správné řešení je jakákoliv dobře formulovaná definice daných pojmů. Bude to určitě správně, pokud si prostě definici zapamatujete z přednášky nebo ze cvičení a takovou ji tam napíšete. Samozřejmě není nutné, abyste si všechny definice pamatovali slovo od slova. Nicméně pokud se budete snažit definici formulovat vlastními slovy, je nutné, aby obsahovala všechny potřebné náležitosti.

U báze mi stačilo něco jako:

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Libovolná lineárně nezávislá generující množina vektorů z L se nazývá *báze L.*

Nebo stručněji

Definice. Báze lineárního prostoru L je libovolná lineárně nezávislá generující množina vektorů z L.

Pokud někdo pracoval s uspořádanými seznamy místo neuspořádaných množin, je to taky v pořádku. Pokud někdo definici formuloval pouze pro konečné množniny/seznamy, taky v pořádku. Definice souřadnic:

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť $\mathscr{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je jeho uspořádaná báze. Pro libovolný vektor $\vec{y} \in L$ zapsaný jako $\vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n$ nazýváme čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ jeho *souřadnice* v bázi $\mathscr{X}$. Definujeme *souřadnicový vektor* $\textbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$.

Stačilo definovat jen jeden z pojmů souřadnice nebo souřadnicový vektor.

Obecně se snažte být co nejpřesnější. Jde-li něco vyjádřit rovnicí, použijte rovnici. Účel definice je, aby bylo absolutně křišťálově jasné, co se pod danou věcí myslí. Umět význam pojmu vyjádřit slovy je rovněž velmi cenné, v kvalitním matematickém textu by se slovním popisem jistě nemělo šetřit, ale základem musí být přesná definice, aby nedocházelo k nějakým nedorozuměním. Speciálně si dejte pozor na následující

- Definuji-li pojem X, musí být jasné, co je X za matematický objekt. Např. *báze je množina vektorů* nebo *báze je seznam vektorů* nebo *souřadnice je číslo z tělesa* $\mathbb{F}$ nebo *souřadnicový vektor je prvek* $\mathbb{F}^n$.
- Definuji-li pojem X, musí být jasné, v jakém kontextu ho definuji a co dalšího k této definici vůbec potřebuji. Např. definujete-li bázi, tak je dobré napsat bázi *čeho.* Pojem *báze* se v matematice používá v různých kontextech. Vy definujete *bázi lineárního prostoru.* Začněte tedy svoji definici tím, že potřebujete lineární prostor. Formulkou *buď L lineární prostor nad tělesem* $\mathbb{F}$ v lineární algebře nic nezkazíte. Stejně tak když definujete ty souřadnice. Ptejte se: Souřadnice čeho? Co vlastně všechno

potřebujeme? Definujeme *souřadnice vektoru v bázi* a ten vektor a ty vektory z báze jsou prvky nějakého lineárního prostoru a ty souřadnice pak budou prvky tělesa. Takže je nutné definici začít něčím jako, *Buď $\mathbb{F}$ těleso, L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\mathscr{X}$ báze L a $\vec{y}$ vektor z L.* To všechno jsou předpoklady a pak teprve můžete něco definovat.

3. *(10 b.)* Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ dané předpisem

$$\mathbf{f}(p(x)) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2.$$

Najděte matici tohoto zobrazení v kanonické bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2)$. Najděte jádro tohoto zobrazení.

Nejprve možná krátké vysvětlení, jak zobrazení vůbec působí, pokud to pro někoho bylo ze zadání obtížně pochopitelné. Zadané lineární zobrazení vezme polynom $p(x)$ a dosadí postupně hodnoty $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Tím určí koeficienty výsledného polynomu podle zadaného vzorce. Například pro polynom $p(x) = 7 - 5x + 2x^2$ máme $p(0) = 7$, $p(1) = 7 - 5 + 2 = 4$, $p(2) = 7 - 10 + 8 = 5$. Zobrazení $\mathbf{f}$ tedy tomuto polynomu přiřadí polynom $\mathbf{f}(p(x)) = 7 + 4x + 5x^2$.

Nyní k řešení. Začneme maticí. Ta má ve sloupečcích souřadnice obrazů vektorů kanonické báze opět v kanonické bázi. Nejprve tedy určíme obrazy polynomů kanonické báze.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1) &= 1 + 1x + 1x^2 \\ \mathbf{f}(x) &= 0 + 1x + 2x^2 \\ \mathbf{f}(x^2) &= 0 + 1x + 4x^2. \end{aligned}$$

Dále vytvoříme souřadnicové vektory v bázi $\mathscr{E}$. To je však jednoduché: Souřadnice v kanonické bázi jsou prostě vektory tvořené koeficienty těch polynomů. Máme tedy

$$\mathbf{coord}_{\mathscr{E}}\,\mathbf{f}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{coord}_{\mathscr{E}}\,\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{coord}_{\mathscr{E}}\,\mathbf{f}(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Matice zobrazení je pak tvořena přesně těmito sloupečky:

$$\mathbf{f}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jádro $\mathbf{f}$ můžeme najít tak, že nejprve najdeme jádro příslušné matice $\mathbf{f}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}$. To byste měli už bez problému umět:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soustava má evidentně pouze triviální řešení. Jádro matice tedy obsahuje pouze nulový vektor $\ker \mathbf{f}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Výsledek musíme ještě „přeložit“ do řeči polynomů: Jádro $\mathbf{f}$ obsahuje pouze nulový polynom $\ker \mathbf{f} = \{o(x)\}$.