Domácí úkol 7 – řešení

1. Uvažujme následující báze v $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3), \qquad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Najděte matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}}$. Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ v bázi $\mathscr{Y}$.

Zde je potřeba vyjádřit vektory báze $\mathscr{X}$ v bázi $\mathscr{Y}$. To se provede vyřešením následující soustavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Matice přechodu tedy je $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nakonec jsme měli vyjádřit souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ v bázi $\mathscr{Y}$. Pro tento účel si nejdříve uvědomíme, že $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a tedy

$$\mathbf{coord}_{\mathscr{Y}} \vec{v} = \mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{Y}} \mathbf{coord}_{\mathscr{X}} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Najděte inverzi k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Využijte tento výsledek, abyste našli řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ se najde pomocí řádkových úprav soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) \sim (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$. Zde

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -22 & -13 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 13 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 31 & -22 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 31 & -22 & 5 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme tedy, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ -18 & 13 & -3 \\ 31 & -22 & 5 \end{pmatrix}$$

Nakonec řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ můžeme najít tak, že spočítáme

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ -18 & 13 & -3 \\ 31 & -22 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvraťte.

a) Existuje monomorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
b) Existuje epimorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
c) Hodnost matice je vždy větší nebo rovna jejímu defektu, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \geq \operatorname{def} \mathbf{A}$ pro každou matici $\mathbf{A}$.
d) Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi cílového lineárního prostoru, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq r$ pro každou matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.
e) Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi definičního oboru, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq s$ pro každou matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.

Především je dobré si uvědomit, co je potřeba k dokázání či vyvrácení tvrzení typu *Existuje matice taková, že …* a *Pro každou matici splňující … platí, že …*

	Dokázat	Vyvrátit
Pro každé x platí …	Abstraktní argumentace	Stačí protipříklad
Existuje x takové, že platí …	Stačí příklad	Abstraktní argumentace

a) Je to pravda. Například matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je monomorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
b) Není pravda. Jak jsme si uváděli na cvičení, nutnou podmínkou pro epimorfismus je, aby daná matice měla aspoň tolik sloupců co řádků.
c) Není pravda. Například nulová matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má defekt dva a hodnost nula.
d) Je to pravda. Hodnost $\operatorname{rank} \mathbf{A}$ je definována jako dimenze obrazu $\operatorname{im} \mathbf{A}$. Vzhledem k tomu, že $\operatorname{im} \mathbf{A}$ je podprostor cílového prostoru $\mathbb{R}^r$, musí jeho dimenze být menší, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \dim \operatorname{im} \mathbf{A} \leq \dim \mathbb{R}^r = r$.
e) Je to pravda. Věta o dimenzi jádra a obrazu říká, že $\operatorname{rank} \mathbf{A} + \operatorname{def} \mathbf{A} = s$. Z toho zjevně plyne, že $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq s$.