Domácí úkol 10 – řešení

1. *(5 b.)* Rozhodněte zda platí následující tvrzení. Tvrzení buď dokažte nebo vyvraťte.

Žádná soustava dvou lineárních rovnic o třech neznámých nemá právě jedno řešení.

Tvrzení platí.

Důkaz. Podle Frobeniovy věty může mít soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ právě jedno řešení jen tehdy, když má soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ právě jedno řešení, tj. $\ker \mathbf{A} = \{0\}$, tj. $\mathbf{A}$ je monomorfismus. Soustava dvou rovnic o třech neznámých je popsaná maticí 2×3, tj. lineárním zobrazením $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$, kde $\mathbb{F}$ je příslušné těleso. Jak už jsme na cvičeních několikrát zmiňovali, matice, která má více sloupečků než řádků, nemůže být monomorfismus.

2. *(5 b.)* Definujte pojem *algebraický doplněk* a formulujte tvrzení o výpočtu determinantu pomocí rozvoje řádku či sloupce.

Definici algebraických doplňků jsem na cvičení uváděl jen ústně. Zapsal bych ji asi takto

Definice. Pro matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ definujeme *algebraický doplněk pozice* (i, j) v matici $\mathbf{A}$ jako $(-1)^{i+j}$ krát determinant matice $\mathbf{A}$ s vyškrtnutým i-tým řádkem a j-tým sloupcem.

Případně můžete převzít definici z přednášky, která je trochu jiná. (Definice ze cvičení je tam jako věta.)

Definice. Buď $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ matice a označme $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ její sloupečky. Determinantu

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{e}_i & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

říkáme *algebraický doplněk* pozice (i, j) v matici $\mathbf{A}$.

Pak můžeme formulovat rozvoj matice podle řádku či sloupce:

Tvrzení. (Rozvoj determinantu podle řádku/sloupce) Uvažujme čtvercovou $n \times n$ matici $\mathbf{A}$. Zvolíme-li řádek $k \in \{1, \dots, n\}$, lze determinant A vyjádřit jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{kj} D_{kj},$$

kde D_{kj} značí algebraický doplněk pozice (k, j) v matici $\mathbf{A}$. Podobně můžeme rozvinout determinant podle l-tého sloupce, $l \in \{1, \dots, n\}$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{A}_{il} D_{il}.$$

3. *(10 b.)* V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{cases} \beta x + y + z = \beta \\ \beta x + \beta y + z = \beta \\ \beta x + \beta y + \beta z = \beta \end{cases}$$

Řešení je možné získat buď Gaussovou eliminací nebo (aspoň částečně) s využitím Cramerova pravidla.

Postup čistě Gaussovou eliminací: Eliminujme tedy[1]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & \beta \\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-1 & \beta-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & \beta \\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \end{array}\right)$$

[1] Zvolil jsem ten nejpřímočařejší postup. Efektivnější by bylo zvolit jako pivotovací řádek ten poslední.

V případě, že $\beta \neq 0, 1$, má soustava právě jedno řešení a sice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. V případě, že $\beta = 1$, získáváme soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, jež má řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. V případě, že $\beta = 0$, nemáme horní blokový tvar a musíme upravovat dál:[2]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení je $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Postup s využitím Cramerova pravidla: Nejprve je potřeba spočítat determinant matice soustavy

$$D := \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = \beta^3 + \beta^2 + \beta - \beta^2 - \beta^2 - \beta^2 = \beta^3 - 2\beta^2 + \beta = \beta(\beta - 1)^2$$

V případě, že $\beta \neq 0, 1$, má soustava právě jedno řešení, které můžeme najít Cramerovým pravidlem:

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = 1, \qquad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = 0, \qquad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = 0$$

V prvním případě jsme si všimli, že se matice nezměnila a determinanty se pokrátí. V druhém a třetím jsme si zase všimli, že matice má dva stejné sloupečky a je tedy zjevně singulární.

Případy $\beta = 0$ a $\beta = 1$ je třeba řešit zvlášť Gaussovou eliminací:

$$\beta = 0: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\beta = 1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

[2] Nebo chytře: Dosadit do původní soustavy a máme rovnou žádaný tvar.