Cvičení 1

Značení

Hned na první přednášce se objeví značně abstraktní pojem *těleso* (přičemž nemáme na mysli známá geometrická tělesa). Netřeba propadat panice, je to jen sofistikované označení pro jakousi vhodnou množinu čísel. Na cvičení bude naším tělesem skoro vždy těleso (množinu) reálných čísel $\mathbb{R}$, občas i těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Dalším pojmem je tzv. *lineární* neboli *vektorový prostor*. Nejde-li vám jeho abstraktní definice do hlavy, pak ji rovněž můžete pro začátek zapomenout. Místo toho si osvojíme následující konkrétní příklady

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{množina } n\text{-tic reálných čísel}$$

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\} \qquad \text{množina } n\text{-tic čísel z } \mathbb{F},\ (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots)$$

$$\mathbb{R}[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \qquad \text{množina všech polynomů s koeficienty v } \mathbb{R}$$

$$\mathbb{F}[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\} \qquad \text{množina všech polynomů s koeficienty v } \mathbb{F}$$

Poznámka. Z analytické geometrie na střední škole jste možná zvyklí např. v rovině rozlišovat *body* $A = [x, y]$ a *vektory* $\vec{v} = (x, y)$. Pro nás bude oboje prostě element $\mathbb{R}^2$ a oboje budeme značit stejným způsobem – jako sloupeček $\binom{x}{y}$. Může to být poněkud matoucí, ale má to zase své praktické výhody.

Pár motivačních příkladů

Cvičení 1.1. Připomeňte si, jak funguje sčítání a odčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Totéž si připomeňte pro polynomy. Spočítejte

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\binom{2}{5} - \binom{-1}{3}$ c) $5\binom{-1}{2}$

d) $(2 + 3x - x^2) + (1 - x)$ e) $(2 + 5x) - (-1 + 3x)$ f) $5(-1 + 2x)$

Cvičení 1.2. Najděte parametrické vyjádření roviny $x - 2z = -1$.

Cvičení 1.3. Najděte průnik přímky

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

s rovinou z předchozího cvičení.

Vektory tedy umíme mezi sebou sčítat a umíme je násobit čísly. Dohromady těmto dvěma operacím říkáme *lineární kombinace*. Zkusme tento pojem formulovat pomocí formální definice.

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Uvažujme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in L$ a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Vektor $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n$ nazveme **lineární kombinace** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Číslům $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ říkáme **koeficienty** této lineární kombinace.

Cvičení 1.4. Napište polynom $p(x) = -8x^2 - 5x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ jako lineární kombinaci (nad $\mathbb{R}$) polynomů

a) $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$,
b) $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = 2x - 5$, $f_3(x) = -x^2 - x + 1$.

Soustavy lineárních rovnic

Jak jsme mohli vidět, většina problémů v lineární algebře povede na soustavu lineárních rovnic. Nyní se proto naučíme soustavy řešit efektivně. Později se tento algoritmus známý jako **Gaussova eliminace** formalizuje na přednášce.

Cvičení 1.5. Vyřešte následující soustavu (v $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 2 \\ y + z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Onen příhodný tvar soustavy z cvičení výše, kde v každém následujícím řádku ubude zleva alespoň jedna proměnná, budeme nazývat **horní blokový tvar**.[1]

Cvičení 1.6. Vyřešte následující soustavu převodem na horní blokový tvar.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

Tvrzení. Následující **ekvivalentní řádkové úpravy** nemění množinu řešení soustavy:

1. prohození dvou řádků,
2. vynásobení řádku nenulovým číslem,
3. přičtení násobku jednoho řádku k druhému.

Pozor, je poněkud ošemetné pokoušet se provádět více úprav naráz! Zkušený řešič či zkušená řešička to jistě zvládne, ale je potřeba postupovat obezřetně. Jinak se člověku všechno navzájem vyruší a ze soustavy nezbude nic.

Cvičení 1.7. Převeďte následující soustavy do maticového tvaru a vyřešte převodem na horní blokový tvar pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

a) $\begin{cases} \alpha \phantom{{}-5\beta} - \gamma = -8 \\ \phantom{\alpha-{}} 2\beta - \gamma = -5 \\ \alpha - 5\beta + \gamma = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x \phantom{{}-y} - z = 1 \end{cases}$

Řešení

1. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $\binom{3}{2}$, c) $\binom{-5}{10}$, d) $3 + 2x - x^2$, e) $(3 + 2x)$, f) $(-5 + 10x)$
2. $x = 2s - 1$, $y = r$, $z = s$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
4. a) $p(x) = 2e_1(x) - 5e_2(x) - 8e_3(x)$, b) $p(x) = -3f_1(x) + 5f_3(x)$
5. $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$
6. $x = 2$, $y = -1$
7. a) $\alpha = -3$, $\beta = 0$, $\gamma = 5$; b) $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$

[1] Toto není žádné jednotné ustálené označení. Myslím, že častěji se tomu říká *horní schodovitý* nebo *stupňovitý* tvar. Anglicky se tomu říká *row echelon form*.