Cvičení 2

Nejprve se ještě vrátíme k soustavám.

Cvičení 2.1. Najděte všechna řešení následujících soustav lineárních rovnic.

a) $\begin{cases} -x+2y = 1 \\ 2x-4y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+2y = 1 \\ 2x-4y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+2y = 0 \\ 2x-4y = 0 \end{cases}$

Lineární podprostor

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Neprázdná množina $V \subset L$ se nazývá **vektorový podprostor**, jestliže je uzavřená na operace lineárního prostoru. To znamená, že pro každou dvojici vektorů $\vec{v}, \vec{w} \in V$ je $\vec{v} + \vec{w} \in V$ a pro každý skalár $\alpha \in T$ a vektor $\vec{v} \in V$ je $\alpha\vec{v} \in V$.

Tvrzení. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a nechť V je jeho lineární podprostor. Potom $\vec{o} \in V$.

Poznámka. V naší paletě lineárních prostorů nad $\mathbb{F}$ máme zatím jen $\mathbb{F}^n$ a $\mathbb{F}[x]$. Nyní do ní můžeme přidat ještě všechny jejich podprostory.

Cvičení 2.2. Rozhodněte, zda je následující množina $M \subset \mathbb{R}^2$ lineární podprostor $\mathbb{R}^2$

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ b) $M = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

Cvičení 2.3. Rozhodněte, které z řešení soustav z prvního cvičení tvoří lineární podprostor $\mathbb{R}^2$.

Definice. Buď $\mathbb{F}$ těleso. Definujeme

$$\mathbb{F}^{\leq n}[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \mid \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

množinu všech polynomů s koeficienty v $\mathbb{F}$ stupně nejvýše n.

Cvičení 2.4. Dokažte, že $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ je lineární podprostor $\mathbb{F}[x]$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Uvažujme vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in L$. Definujeme jejich **lineární obal** jako

$$\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} = \{\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Poznámka. Tímto jsme definovali lineární obal neprázdné konečné množiny vektorů. Na cvičení nic jiného potřebovat nebudeme. Na přednášce se definuje lineární obal libovolné množiny vektorů. Třeba i

- prázdné – jako $\operatorname{span}\emptyset = \{\vec{o}\}$,
- nekonečné – jako $\operatorname{span} M = \{\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{x}_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{F},\ \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in M, k \in \mathbb{N}_0\}$.

Lineární obal byť nekonečné množiny jsou tedy všechny možné *konečné* lineární kombinace. Kombinace nekonečně mnoha vektorů tvořit nelze, neboť tato operace není definována.

Tvrzení. Lineární obal je vždy lineární podprostor. Naopak každý lineární podprostor V je lineárním obalem, neboť platí $V = \operatorname{span} V$.

Cvičení 2.5. Uvažujme následující trojici vektorů

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, kde

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Definice. Množinu vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ nazveme **lineárně nezávislou**, jestliže rovnost $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{o}$ implikuje $\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0$. V opačném případě je tato množina **lineárně závislá**.

Řešení

1. a) $x = 2t-1$, $y = t$; b) $\emptyset$; c) $x = 2t$, $y = t$
2. ne, ano, ne
3. ne, ne, ano
4. $\mathbb{F}^{\leq n}[x] = \operatorname{span}\{1, x, \ldots, x^n\}$
5. ano, ano, ne