Cvičení 3

Tvrzení. Buď V nějaký lineární podprostor lineárního prostoru L. Uvažujme $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$. Potom $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subseteq V$.

Tvrzení. Uvažujme v L dvě množiny vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ a $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$. Označme $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$, $W := \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$. Potom platí $V = W$ právě tehdy, když $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in W$ a $\vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_l \in W$.

Cvičení 3.1. Uvažujme následující vektory v $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Označme $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, $W = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$. Rozhodněte zda platí následující tvrzení

a) $\vec{y}_1 \in V$, b) $\vec{y}_2 \in V$, c) $\vec{y}_3 \in V$,
d) $\vec{x}_1 \in W$, e) $\vec{x}_2 \in W$, f) $\vec{x}_3 \in W$,
g) $V \subseteq W$, h) $V \supseteq W$, i) $V = W$,
j) $V = \mathbb{R}^3$, k) $W = \mathbb{R}^3$.

Lineární (ne)závislost, báze, dimenze

Definice. Množinu vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ nazveme **lineárně nezávislou**, jestliže rovnost $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{o}$ implikuje $\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 0$. V opačném případě je tato množina **lineárně závislá**.

Cvičení 3.2. Uvažujte vektory z předchozího úkolu. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé.

a) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ b) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ c) $\{\vec{x}_1\}$ d) $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ e) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$ f) $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1\}$ g) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_3\}$

Definice. Množina vektorů $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ **generuje** podprostor $V \subseteq L$, jestliže $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$.

Cvičení 3.3. Uvažujme opět tytéž vektory. Rozhodněte, zda následující množina generuje V.

a) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ b) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ c) $\{\vec{x}_1\}$ d) $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ e) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$ f) $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1\}$ g) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_3\}$

Cvičení 3.4. Uvažujte vektory z předchozího úkolu. Rozhodněte, zda následující množina generuje $\mathbb{R}^3$.

a) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ b) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ c) $\{\vec{x}_1\}$ d) $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ e) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1\}$ f) $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1\}$ g) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_3\}$

Definice. **Báze** lineárního prostoru L je libovolná lineárně nezávislá generující množina (tj. množina, která generuje celý prostor L).

Definice. Řekneme, že lineární prostor L má dimenzi $n \in \mathbb{N}$, jestliže L má n-prvkovou bázi. (Pokud žádnou konečnou bázi nemá, říkáme, že dimenze je nekonečno.)

Tvrzení. (Vlastnosti báze a dimenze) Buď L lineární prostor dimenze n. (Tj. takový, ve kterém existuje lineárně nezávislá generující množina o n prvcích.) Potom platí:

- Každá další báze (LN generující množina) má taky n prvků. (Definice dimenze tedy má smysl.)
- Každá množnina, která má více než n prvků je lineárně závislá.
- Žádná množina, která má méně než n prvků není generující.
- Množina, která má právě n prvků je lineárně nezávislá, právě když je generující.
- Jestliže $V \subseteq W$ (resp. $V \subsetneq W$) podprostory L, pak $\dim V \leq \dim W$ (resp. $\dim V < \dim W$).
- Jestliže $V \subseteq W$ (podprostory L) a $\dim V = \dim W$, pak $V = W$.

Cvičení 3.5. Určete dimenzi $V \subset \mathbb{R}^3$ ze cvičení výše.

Cvičení 3.6. Jaká je dimenze $\mathbb{R}^n$? Jaká je dimenze $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$?

Řešení

1. ano, ano, ne, ano, ano, ano, ano, ne, ne, ne, ano
2. LZ, LN, LN, LN, LZ, LN, LN
3. ano, ano, ne, ne, ano, ano, ne
4. ne, ne, ne, ano, ne, ne, ano
5. 2
6. n, $n+1$