Cvičení 4

Báze, dimenze, souřadnice

Dnes budeme především procvičovat pojmy báze, dimenze, souřadnice zavedené na minulém cvičení. Začneme však novým pojmem:

Hlavní aplikací pojmu báze je zavedení tzv. souřadnic. Z tohoto důvodu se vyplatí přemýšlet o bázích ne jako o množinách vektorů (kde nezáleží na pořadí), ale o uspořádaných n-ticích (na přednášce se také používá pojem *seznam vektorů*). Seznamu vektorů, který je LN a generující se na přednášce říká *uspořádaná báze.*

Úmluva. Odteď když řeknu na cvičení *báze*, tak budu mít na mysli uspořádanou bázi. Budu se to v definicích snažit připomínat, ale třeba občas zapomenu. Pro přehlednost budu uspořádané báze značit velkými psacími písmeny. Např. $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$ a nechť $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je jeho (uspořádaná) báze. Pro libovolný prvek $\vec{v} \in L$ definujeme jeho **souřadnicový vektor** v bázi $\mathscr{X}$ jako

$$\textbf{coord}_{\mathscr{X}}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n, \qquad \text{kde} \qquad \vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n.$$

Cvičení 4.1. Uvažujme lineární prostor polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, tj.

$$\mathbb{R}^{\leq 2}[x] = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Najděte souřadnice polynomu $p(x) = -3x^2 + 7x + 10$ v bázi

a) $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$,
b) $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, kde $f_1(x) = -2x^2 + x + 1$, $f_2(x) = 2x - 1$, $f_3(x) = x^2 + 3$.

Tvrzení. (Vlastnosti báze a dimenze) Buď L lineární prostor dimenze n. (Tj. takový, ve kterém existuje lineárně nezávislá generující množina o n prvcích.) Potom platí:

- Každá další báze (LN generující množina) má taky n prvků.
- Každá množnina, která má více než n prvků je lineárně závislá.
- Žádná množina, která má méně než n prvků není generující.
- Množina, která má právě n prvků je lineárně nezávislá, právě když je generující.
- Jestliže $V \subseteq W$ (resp. $V \subsetneq W$) podprostory L, pak $\dim V \leq \dim W$ (resp. $\dim V < \dim W$).
- Jestliže $V \subseteq W$ (podprostory L) a $\dim V = \dim W$, pak $V = W$.

Cvičení 4.2. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ seznam $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, kde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Je tento seznam lineárně nezávislý?
b) Je tento seznam generující? (Generuje $\mathbb{R}^2$?)

Cvičení 4.3. Uvažujme lineární podprostor $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cíl tohoto cvičení je najít bázi a určit dimenzi V. Budeme posutpovat takto:

a) Rozhodněte, zda množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ generuje V.
b) Rozhodněte, zda je množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ lineárně nezávislá. Je to báze V?
c) Rozhodněte, zda $\vec{x}_3 \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Rozhodněte, zda $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ generuje V.
e) Rozhodněte, zda je množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ lineárně nezávislá? Je to báze V?
f) Jaká je dimenze V?
g) Určete souřadnice vektorů $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ a $\vec{x}_3$ v nalezené bázi.

Tvrzení. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Je-li množina $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset L$ lineárně závislá, pak v ní existuje nějaký vektor $\vec{x}_i$, jenž je lineární kombinací ostatních.

Tvrzení. (Výběr báze z generující množiny) Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Nechť $G = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ generuje L. Pak existuje podmnožina $B \subset G$, jež je bází L.

Cvičení 4.4. V $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ označme $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi V a určete dimenzi V.

Tvrzení. Nechť $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je lineárně nezávislá množina. Předpokládejme navíc, že není generující, tj. existuje vektor $\vec{y} \notin \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, pak je nově utvořená množina $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y})$ rovněž lineárně nezávislá.

Věta. (Doplnění lineárně nezávislého seznamu na bázi) Buď $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ lineárně nezávislý seznam v L nad T. Potom existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ tvoří bázi L.

Cvičení 4.5. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ vektory

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ generující (zda generuje celé $\mathbb{R}^3$). (*Návod:* Zkuste na to přijít bez počítání!)
b) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ lineárně nezávislý.
c) Určete dimenzi $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Doplňte tento seznam na bázi $\mathbb{R}^3$, tj. najděte bázi $\mathbb{R}^3$ obsahující vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$. (*Návod:* Označíme-li $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektory kanonické báze, pak je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ určitě generující. Vybrat bázi z generujícího seznamu už umíme.)

Řešení

1. $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. ne, ano
3. ano, ne, ano, ano, ano, 2, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. např. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4\}$
5. ne; ano; 2; $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_2)$