Cvičení 5

Lineární zobrazení

Definice. Buďte V, W lineární prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ se nazývá **lineární**, jestliže je

- *aditivní*, tj. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)\ \mathbf{f}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})$ a
- *homogenní*, tj. $(\forall \alpha \in \mathbb{F})\ (\forall \vec{x} \in V)\ \mathbf{f}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x})$.

Finta. Stačí ověřit, že pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $\mathbf{f}(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y})$.

Cvičení 5.1. Určete, které z následujících zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární.

a) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$
d) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y+2 \end{pmatrix}$ e) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$ f) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Poznámka. Ze střední školy znáte pojem *lineární funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což byla funkce daná předpisem $f(x) = ax + b$. Tyto funkce u nás *nebudeme považovat za lineární*, pokud neplatí $b = 0$.

Pozorování. Je-li $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V, pak je libovolné lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ jednoznačně určené svojí akcí na bázi $\mathbf{f}(\vec{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\vec{x}_n)$. Vskutku: chceme-li znát obraz libovolného $\vec{y} = \alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n$, stačí spočítat $\mathbf{f}(\vec{y}) = \alpha_1\mathbf{f}(\vec{x}_1) + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}(\vec{x}_n)$.

Značení. Lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ budeme zapisovat ve tvaru **matice** $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\vec{e}_1 \cdots \mathbf{A}\vec{e}_s)$, kde $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s$ je kanonická báze $\mathbb{R}^s$.

Cvičení 5.2. Určete matice lineárních zobrazení z předchozího cvičení.

Cvičení 5.3. Popište slovy následující lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pro vizualizaci můžete využít web shad.io/MatVis

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cvičení 5.4. Najděte matici zrcadlení podél přímky $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Cvičení 5.5. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete, jak matice působí na obecný vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

b) Najděte všechna řešení rovnice $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Rozhodněte, zda daná množina řešení tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, jaká je jeho dimenze?

d) Uvažujme lineární obal sloupečků matice $\mathbf{A}$, tj. $V := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Najděte bázi V a určete dimenzi V.

Definice. Buď $\mathbf{f}\colon V \to W$ lineární zobrazení. Definujeme **jádro** tohoto zobrazení jako

$$\ker \mathbf{f} = \{\vec{x} \in V \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}\}.$$

Platí, že jádro je vždy lineární podprostor $\ker \mathbf{f} \subset V$. Dimenze jádra jako vektorové prostoru se nazývá **defekt** zobrazení $\mathbf{f}$; značíme $\operatorname{def} \mathbf{f} = \dim \ker \mathbf{f}$.

Definice. Buď $\mathbf{f}\colon V \to W$ lineární zobrazení. Definujeme **obraz** tohoto zobrazení jako

$$\operatorname{im} \mathbf{f} = \{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V\}.$$

Platí, že obraz je vždy lineární podprostor $\operatorname{im} \mathbf{f} \subset W$. Dimenze obrazu jako vektorového prostoru se nazývá **hodnost** zobrazení $\mathbf{f}$; značíme $\operatorname{rank} \mathbf{f} = \dim \operatorname{im} \mathbf{f}$.

Cvičení 5.6. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete, jak toto zobrazení působí na obecný vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b) Najděte jádro a defekt zobrazení $\mathbf{A}$.

c) Najděte obraz a hodnost zobrazení $\mathbf{A}$.

Řešení

1. ano, ne, ano, ne, ne, ano
2. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. roztažení $2\times$ ve směru x; zkosení osy y; otočení o 45° a zároveň dvojnásobné zvětšení; průmět na osu x; průmět na osu $x = y$; zrcadlení podle osy y
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} x+2y-z \\ -y-z \\ x-3z \\ x+3y \end{pmatrix}$; $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; ano; $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, 2
6. $\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} x+2y-2z-u \\ 2x+4y+z+3u \\ -x-2y-u \end{pmatrix}$; $\ker \mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{def} \mathbf{A} = 2$; $\operatorname{im} \mathbf{A} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$