Cvičení 7

Cvičení 7.1. Vzpomeňte si na operátor derivace $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, který zobrazuje

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \mapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

a) Připomeňte si, jak vypadá matice tohoto operátoru v kanonické bázi $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$.
b) Najděte matici tohoto opertáoru $\mathbf{D}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}}$ v bázi $\mathscr{X} = (1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3)$ bez použití matic transformace souřadnic.
c) Najděte matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$ a $\mathbf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}}$, kde $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3)$ je kanonická báze $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.
d) Ověřte pomocí maticového násobení, že platí $\mathbf{D}^{\mathscr{X}}_{\mathscr{X}} = \mathbf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}}\mathbf{D}^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}}$.
e) Najděte souřadnice polynomu $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ v bázi $\mathscr{X}$.

Mono-, epi-, izo-morfismy

Cvičení 7.2. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete vzor vektoru $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Tj. najděte všechny vektory $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right)$ takové, že $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{v}$. Je řešení jednoznačné?

Definice. Lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon V \to W$ se nazývá

- **monomorfismus**, jestliže je prosté, což platí právě tehdy když $\ker \mathbf{f} = \{\vec{o}\}$, což platí právě tehdy, když $\operatorname{def} \mathbf{f} = 0$
- **epimorfismus**, jestliže je na, tj. $\operatorname{im} \mathbf{f} = W$, což platí právě tehdy, když $\operatorname{rank} \mathbf{f} = \dim W$.
- **izomorfismus**, jestliže splňuje obě podmínky.

Cvičení 7.3. U následujících matic rozhodněte, zda jde o monomorfismus, epimorfismus nebo izomorfismus.

a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Pozorování. Pro matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ platí

- $\mathbf{A}$ je monomorfismus právě tehdy, když má lineárně nezávislé sloupečky (což může nastat jen tehdy, když $s \leq r$),
- $\mathbf{A}$ je epimofismus právě tehdy, když její sloupečky generují $\mathbb{R}^r$, (což může nastat jen tehdy, když $s \geq r$),
- $\mathbf{A}$ je izomorfismus právě tehdy, když její sloupečky tvoří bázi $\mathbb{R}^r$ (což může nastat jen tehdy, když $r = s$, tj. $\mathbf{A}$ je čtvercová matice).

Pozorování. Čtvercová matice je monomorfismus právě tehdy, když je epimorfismus.

Inverzní matice

Definice/Tvrzení. Buďte X, Y libovolné množiny, $f\colon X \to Y$ libovolné zobrazení. Zobrazení g se nazývá **inverzní** k f, jestliže $f \circ g = \mathrm{id} = g \circ f$, tj. jestliže $f(g(y)) = y$ pro každé $y \in Y$ a $g(f(x)) = x$ pro každé $x \in X$. Inverzní zobrazení existuje právě tehdy, když f je bijekce. V tom případě je dané jednozačně a značí se f^{-1}.

Tvrzení. Nechť $\mathbf{f}\colon V \to W$ je bijektivní lineární zobrazení. Potom $\mathbf{f}^{-1}\colon W \to V$ je rovněž lineární.

Cvičení 7.4. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte inverzi $\mathbf{A}^{-1}$. Ověřte výsledek pomocí maticového násobení $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}\vec{v}$.

Řešení

1. $\mathbf{D}_{\mathscr{X}}^{\mathscr{X}} = \mathbf{D}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{T}_{\mathscr{E}\mapsto\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
   $\mathbf{T}_{\mathscr{X}\mapsto\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{coord}_{\mathscr{X}}\, p(x) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, ano
3. epi, mono, nic, izo
4. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$