Cvičení 9

Definice. Bijektivní zobrazení $\pi\colon M \to M$, kde M je konečná množina, nazýváme **permutace** množiny M. Množinu všech permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ značíme S_n.

Značení. Permutace lze zapisovat rozličnými způsoby. Pro ilustraci uvažme následující permutaci šesti prvků

$$\pi\colon \quad 1 \mapsto 3, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 4, \quad 6 \mapsto 6.$$

Působení permutace se často zapisuje do tabulky následujícím způsobem

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Permutaci můžeme rovněž zapsat diagramaticky $\pi =$ .

Poznámka. (Pokud vím, následující se neprobírá na přednášce a není tedy potřeba umět u zkoušky.) Permutace se také dají zapisovat pomocí tzv. cyklů: $\pi = (132)(45)$ (např. cyklus (123) znamená zobrazení $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$) nebo jako složení transpozic $\pi = (23)(12)(45)$ (transpozice je cyklus délky dva, tj. prohození dvou prvků).

Cvičení 9.1. Zapište pomocí tabulky a pomocí diagramu permutaci $\sigma \in S_6$ zobrazující

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 6, \quad 4 \mapsto 4, \quad 5 \mapsto 1, \quad 6 \mapsto 5$$

Cvičení 9.2. Nalezněte inverzi obou permutací π a σ a jejich složení $\pi \circ \sigma$ a $\sigma \circ \pi$.

Definice. Pro $\pi \in S_n$ říkáme, že dvojice čísel (i, j), $1 \leq i < j \leq n$ tvoří **inverzi**, jestliže $\pi(i) > \pi(j)$. Říkáme, že permutace π je **sudá**, jestliže má sudý počet inverzí, naopak je **lichá**, jestliže má lichý počet inverzí. Definujeme **znaménko permutace**

$$\operatorname{sign} \pi = \begin{cases} +1 & \pi \text{ je sudá,} \\ -1 & \pi \text{ je lichá.} \end{cases}$$

Cvičení 9.3. Určete znaménka permutací π, σ, $\pi \circ \sigma$, $\sigma \circ \pi$.

Definice. Buď $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ čtvercová matice. Definujeme její **determinant** jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \, \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n)}.$$

Tvrzení. Čtvercová matice $\mathbf{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ představuje izomorfismus právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$. Matici jenž představuje izomorfismus se říká **regulární**. V opačném případě se nazývá **singulární**.

Cvičení 9.4. Spočítejte determinant následujících matic. Rozhodněte, která z nich je regulární.

a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tvrzení. (Rozvoj determinantu podle řádku/sloupce) Uvažujme čtvercovou $n \times n$ matici $\mathbf{A}$. Zvolíme-li řádek $k \in \{1, \dots, n\}$, lze determinant A vyjádřit jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{kj} D_{kj},$$

kde D_{kj} jsou tzv. *algebraické doplňky* matice $\mathbf{A}$. Podobně můžeme rozvinout determinant podle l-tého sloupce, $l \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{A}_{il} D_{il}.$$

Cvičení 9.5. Spočítejte determinant metodou rozvoje podle řádku/sloupce

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Tvrzení. (Vlastnosti determinantu)

- Determinant není lineární: $\det(A+B)$ se nemusí rovnat $\det A + \det B$. Stejně tak $\det(\alpha A)$ se nemusí rovnat $\alpha \det A$.
- Determinant je multiplikativní: $\det(AB) = \det A \det B$.
- Determinant je multilineární ve sloupcích a řádcích. Speciálně platí $\alpha \det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}}$, jestliže $\tilde{A}$ vznikla z $\mathbf{A}$ vynásobením jednoho řádku/sloupce číslem α.
- Determinant se nemění přičtením násobku řádku (resp. sloupce) k jinému řádku (resp. sloupci), tj. platí $\det \mathbf{A} = \det \tilde{\mathbf{A}}$, kde $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla z $\mathbf{A}$ přičtením α-násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému.
- Při prohazování řádků/sloupců determinant mění pouze znaménko, tj. $\det \mathbf{A} = -\det \tilde{A}$, kde $\tilde{A}$ vznikla z $\mathbf{A}$ prohozením dvou řádků (sloupců).
- Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

V důsledku lze determinanty počítat pomocí Gaussovy eliminace.

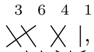
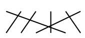
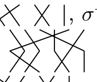
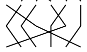
Cvičení 9.6. Spočítejte determinant pomocí Gaussovy eliminace

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 9.7. Spočítejte determinant. (Libovolným způsobem, šikovná je kombinace různých metod.)

$$\det \begin{pmatrix} -12 & 4 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 3 & 1 & 0 \\ 26 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$ 
2. $\pi^{-1} =$ , $\sigma^{-1} =$ ,
   $\pi \circ \sigma =$  $=$ ,
   $\sigma \circ \pi =$  $=$ 
3. $\operatorname{sign} \pi = \operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = -1$, $\operatorname{sign} \sigma = 1$
4. 1 (reg.), 0 (sing.)
5. -70
6. 160
7. 490