Cvičení 14

Soustavy rovnic, maticové rovnice a jejich aplikace

Cvičení 14.1. Uvažujme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vyřešte maticové rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Cvičení 14.2. Najděte nějakou soustavu rovnic o čtyřech neznámých, jejíž řešením je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Cvičení 14.3. Najděte ortogonální doplněk prostoru

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Cvičení 14.4. Najděte soustavu rovnic o třech neznámých, jejímž řešením je

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Průnik a spojení lineárních podprostorů

Definice. Buďte V, W podprostory lin. prostoru L nad $\mathbb{F}$. Jejich *spojení* je definováno jako

$$V \vee W = \{\vec{v} + \vec{w} \mid \vec{v} \in V, \vec{w} \in W\}.$$

Tvrzení. Buďte V, W podprostory L nad $\mathbb{F}$. Potom i $V \cap W$ a $V \vee W$ je lineární podprostor.

Věta. S předpoklady výše platí $\dim(V \vee W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$.

Cvičení 14.5. Uvažujme následující podprostory $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Najděte báze podprostorů $V \vee W$ a $V \cap W$.

Vzájemná vzdálenost afinních podprostorů

Tvrzení. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Uvažujme dva afinní podprostory

$$M = \vec{p} + V, \qquad N = \vec{q} + N,$$

kde $\vec{p}, \vec{q} \in L$ jsou vektory a $M, N \subseteq L$ jsou podprostory. Vzdálenost

$$d(M,N) = \inf\{\|\vec{v} - \vec{w}\| \mid \vec{v} \in M, \vec{w} \in N\}$$

lze spočítat pomocí vzorce

$$d(M,N) = \|\operatorname{rej}_{V \vee W}(\vec{q} - \vec{p})\|.$$

Cvičení 14.6. Najděte vzdálenost zadaného afinního prostoru N od přímky $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem.

a) Bod $N = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$,

b) přímka $N = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,

c) přímka $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$,

d) přímka $N = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$,

e) rovina $N = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Konečná tělesa

Následující se u zkoušky nejspíše neobjeví, ale když už jsme celý semestr všechno formulovali pro čísla z nějakého tajemného *tělesa*, připomeňme si, že existují i docela jiná tělesa než množina reálných či komplexních čísel. Neformálně je těleso taková množina, kde lze smysluplně zavést sčítání, odčítání, násobení a dělení. Formálně jste si tu smysluplnost formulovali na přednášce.

Pro $p \in \mathbb{N}$ můžeme definovat množinu $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Na této množině lze sčítat, odčítat a násobit „modulo p". Tím se myslí, že provedeme tu operaci klasickým způsobem a následně spočítáme zbytek po dělení výsledku číslem p. Jedná se vlastně o počítání na hodinovém ciferníku s p čísly. Tyto operace splňují všechny myslitelné vlastnosti jako běžné sčítání, odčítání a násobení (komutativita, asociativita, distributivita, existence nuly a jedničky). Jedná se proto o takzvaný *okruh*. Příklady výpočtů:

$$2 + 3 = 5 = 0, \qquad 2 \cdot 3 = 6 = 1, \qquad 2 - 3 = -1 = 4.$$

Je-li p prvočíslo, lze na této množině zavést i dělení, a to jako operaci opačnou k násobení. Okruh se tím stává tělesem. Myslíme tím, že každý prvek $\mathbb{Z}_p$ je dělitelný každým nenulovým prvkem $\mathbb{Z}_p$. Tedy pro každé $a, b \in \mathbb{Z}_p$, $b \neq 0$ existuje $x \in \mathbb{Z}_p$ takové, že $xb = a$ a čílo x pak nazýváme podíl a děleno b. Toto dělení funguje úplně jinak než na množině celých nebo reálných čísel. (Celá čísla vlastně většinou vůbec dělit nelze.) Ptáme-li se, kolik je 1 děleno 3, znamená to, že chceme vědět, jakým prvkem $\mathbb{Z}_p$ vynásobit 3, abychom dostali 1. No a odpověď je, že $1 : 3 = 2$, neboť jak jsme výše spočítali, platí, že $2 \cdot 3 = 1$.

Cvičení 14.7. Nad $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5$ rozhodněte, zda vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ generují $\mathbb{F}^2$.

Cvičení 14.8. Určete dimenzi podprostoru

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{F}^3$$

nad $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5$.

Cvičení 14.9. Rozhodněte, zda je zobrazení $\mathbf{f} \colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ dané předpisem $\mathbf{f}(x) = x^2$ lineární.

Často jsme počítali s polynomy a vždy jsme zdůrazňovali, že bereme polynomy jako výrazy, nikoliv jako funkce. Jsou to obrázky typu $3x^2 + 5x - 6$, sčítají se tak, že se sčítají jednotlivé koeficienty, nulový polynom je definován jako takový, který má všechny koefecienty nulové apod. Ale především: Dva polynomy považujeme za totožné, když je to ten samý výraz s totožnými koeficienty. Ani v tomto ohledu nás nezajímá, jak se polynomy chovají jako funkce. Trochu si tím šetříme práci: Fakt, že jsou polynomy $1, x, x^2, \dots$ vzájemně lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathbb{F}[x]$ plyne přímo z definice.

Cvičení 14.10. Buď $\mathbb{F}$ těleso. Uvažujme množinu funkcí $P = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $f_i\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ je definována jako $f_i(x) = x^i$. Ukažte, že P je nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (nad jakýmkoliv podtělesem $\mathbb{C}$) lineárně nezávislá. Ukažte naopak, že je-li těleso $\mathbb{F}$ konečné, je množina P lineárně závislá.

Řešení

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1+4r & 1+r & -2-7r \\ -2+4s & s & 1-7s \\ 2+4t & 1+t & -4-7t \end{pmatrix}$
2. Třeba $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 & 3 & 25 \end{array}\right)$
3. $V^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
4. Třeba $-14x + 13y + 5z = -9$
5. $V \vee W$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

   $V \cap W$: $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$
6. $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{11}$, 0, $\sqrt{13}$, $\sqrt{8}$
7. ne
8. 2
9. ano