

Domácí úkol 1 – řešení

1. Převedte následující soustavu na maticový tvar a vyřešte pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

V první vlnovce jsme prohodili první dva řádky, a pak jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku od druhého a trojnásobek prvního řádku od třetího. V druhé vlnovce jsme druhý řádek vydělili třemi a pak jsme jeho pětinásobek odečetli od posledního.

Zpětná substituce nám dá $z = 2$, $y = -1$, $x = 1$.

2. Napište vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{b) } \vec{x}_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Část (a) je zřejmá: vektor se dá zapsat jako $\vec{v} = 0\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

V části (b) řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ta se dá zapsat jako soustava tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\gamma = -2 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = -2 \end{cases}$$

Až naberete trochu zkušeností, budete rovnou psát matici soustavy, jež má ve sloupečcích vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a na pravé straně vektor $\vec{v}$. Matice se pak dá opět upravit pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \end{array} \right)$$

V zadání jsme nechtěli, abyste našli všechny možné způsoby, jak vektor napsat jako lineární kombinaci. Chtěli jsme pouze, abyste našli nějaký. Stačí teda najít jedno řešení soustavy. Položíme-li $\gamma = 0$, můžeme dopočítat $\beta = -4$, $\alpha = -2$, čili $\vec{v} = -2\vec{x}_1 - 4\vec{x}_2$.

Kdo se pokoušel hledat všechna řešení, dají se napsat parametricky třeba takto: $\gamma = t$, $\beta = -4 - 5t$, $\alpha = -2 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Zformulujte a dokažte větu o řešení jedné lineární rovnice s jednou neznámou.

Znění věty jsem vám v zadání napověděl, chybělo pouze doplnit předpoklady a konkrétní tvar řešení. Kdo byl na přednášce, dozvěděl se, jak zhruba mají předpoklady vypadat, neboť jsme tam společně definovali pojem *lineární rovnice*. Tato definice začínala formulkou *Buďte* $a, b \in \mathbb{R}$, kterou bude evidentně nutné použít i zde. Nabízí se tedy následující formulace:

Hypotéza. Budte $a, b \in \mathbb{R}$. Potom jediným řešením rovnice $ax = b$ je číslo $x = b/a$.

Napsal jsem záměrně *hypotéza*, nikoliv *věta*, neboť výrok se stává matematickou větou až poté, co se nám jej podaří dokázat. Už při psaní této hypotézy, ale nejpozději při pokusu o formulaci důkazu bychom si však měli všimnout, že tvrzení ve skutečnosti není pravdivé, ba co víc, nedává smysl. Konkrétně totiž pro $a = 0$ nemáme definovaný zlomek b/a . Následuje tedy korekce naší hypotézy, kterou se nám již podaří dokázat:

Věta. Budte $a, b \in \mathbb{R}$ a necht $a \neq 0$. Potom jediným řešením rovnice $ax = b$ je číslo $x = b/a$.

Důkaz. Ve větě tvrdíme dvě věci: Za prvé, že číslo $x = b/a$ je řešením rovnice $ax = b$, za druhé, že je to řešení jediné, tj. pro žádné další $x \in \mathbb{R}$ rovnost neplatí. Musíme dokázat oboje.

Nejprve dokažme, že $x = b/a$ řeší rovnici $ax = b$. To se snadno provede dosazením do rovnice: $ax = ab/a = b$.

Nyní dokažme, že je to řešení jediné. Vezmeme tedy jakékoliv $x \in \mathbb{R}$ splňující rovnici $ax = b$. Potom $x = ax/a = b/a$. □

Někdo by mohl formulovat komplikovanější větu následujícím způsobem:

Věta. Budte $a, b \in \mathbb{R}$. Uvažujme rovnici $ax = b$. Potom nastane právě jeden z následujících případů

- $a \neq 0$, pak je jediným řešením rovnice číslo $x = b/a$,
- $a = 0, b = 0$, pak je řešením rovnice jakékoliv $x \in \mathbb{R}$,
- $a = 0, b \neq 0$, pak rovnice nemá řešení.

Důkaz. Že se uvedené případy vzájemně vylučují a pokrývají všechny možnosti $a, b \in \mathbb{R}$ je zřejmé. První případ jsme již dokázali výše.

Ve druhém případě ukažme, že vážně libovolné $x \in \mathbb{R}$ řeší rovnici. Vezmeme tedy nějaké $x \in \mathbb{R}$ a dosadíme do rovnice: $ax = 0x = 0 = b$. Opravdu je splněna.

Nakonec se podívejme na třetí případ. Musíme vzít libovolné $x \in \mathbb{R}$ a ukázat, že rovnice splněna není. Opět dosazením: $ax = 0x = 0 \neq b$. □

Procvičili jsme si tak čtyři dovednosti

1. Objevit nějakou zákonitost,
2. přijít zákonitosti na kloub (proč platí),
3. přesně ji formulovat jako (matematické) tvrzení,
4. tvrzení formálně dokázat.

Jsem přesvědčen, že se vám budou hodit i mimo matematický život, proto je zde procvičujeme. Jdou bohužel celkem těžko přednášet. Druhou dvojici můžete okoukat z přednášek matematických předmětů. Mohl bych udělat nějaký suchý výklad dokazovacích technik, ale asi by vás moc nebavil. Spíš se pokusím upozornit přímo na přednášce vždy, když narazíme na důkaz hodný pozornosti. První dvojice schopností se předává ještě hůř. Vše si osvojíte nejlépe samostatným procvičováním.