

Domácí úkol 7

Toto je povinný domácí úkol, který prosím přineste na deváté cvičení 19. 11. Pokud se na cvičení nemůžete dostavit, pošlete prosím úkol mailem nebo odevzdejte přes Moodle. Na osmé cvičení žádný úkol zadáný není, neboť byste se měli připravovat především na písemku. Na druhou stranu minimálně první úlohu lze doporučit jako vhodnou přípravu k písemce.

1. Uvažujme následující báze v $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3), \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Najděte matici přechodu $[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$. Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ v bázi $\mathcal{Y}$.

2. Najděte inverzi k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Využijte tento výsledek, abyste našli řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvraťte.

- Existuje monomorfismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- Existuje epimorfismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- Hodnost matice je vždy větší nebo rovna jejímu defektu, tj. $\text{rank } \mathbf{A} \geq \text{def } \mathbf{A}$ pro každou matici $\mathbf{A}$.
- Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi cílového lineárního prostoru, tj. $\text{rank } \mathbf{A} \leq r$ pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times s}$.
- Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi definičního oboru, tj. $\text{rank } \mathbf{A} \leq s$ pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times s}$.