

Domácí úkol 10 – řešení

1. (5 b.) Rozhodněte zda platí následující tvrzení. Tvrzení buď dokažte nebo vyvráťte.

Žádná soustava dvou lineárních rovnic o třech neznámých nemá právě jedno řešení.

Tvrzení platí.

Důkaz. Podle Frobeniovy věty může mít soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ právě jedno řešení jen tehdy, když má soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ právě jedno řešení, tj. $\ker \mathbf{A} = \{0\}$, tj. \mathbf{A} je monomorfismus. Soustava dvou rovnic o třech neznámých je popsána maticí $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{2 \times 3}$. Jak už jsme na cvičeních několikrát zmiňovali, matice, která má více sloupečků než řádků, nemůže být monomorfismus.

2. (5 b.) Definujte pojem *algebraický doplněk* a formulujte tvrzení o výpočtu determinantu pomocí rozvoje řádku či sloupce.

Definici algebraických doplňků jsem na cvičení uváděl jen ústně. Je možné použít formulaci z přednášky

Definice. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. *Algebraický doplněk* pozice (i, j) v matici \mathbf{A} je číslo $(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}^{(i,j)}$, kde $\mathbf{A}^{(i,j)}$ je matice, která vznikne z \mathbf{A} odstraněním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Pak můžeme formulovat rozvoj matice podle řádku či sloupce:

Tvrzení. (Rozvoj determinantu podle řádku/sloupce) Uvažujme čtvercovou $n \times n$ matici \mathbf{A} . Zvolíme-li řádek $k \in \{1, \dots, n\}$, lze determinant \mathbf{A} vyjádřit jako

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{kj} D_{kj},$$

kde D_{kj} značí algebraický doplněk pozice (k, j) v matici \mathbf{A} . Podobně můžeme rozvinout determinant podle l -tého sloupce, $l \in \{1, \dots, n\}$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{il} D_{il}.$$

3. (10 b.) V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{cases} \beta x + y + z = \beta \\ \beta x + \beta y + z = \beta \\ \beta x + \beta y + \beta z = \beta \end{cases}$$

Řešení je možné získat buď Gaussovou eliminací nebo (aspoň částečně) s využitím Cramerova pravidla.

Postup čistě Gaussovou eliminací: Eliminujme tedy¹

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \beta \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & \beta \\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-1 & \beta-1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & 1 & \beta \\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \end{array} \right)$$

V případě, že $\beta \neq 0, 1$, má soustava právě jedno řešení a sice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. V případě, že $\beta = 1$, získáváme soustavu $(1 \ 1 \ 1 \ | \ 1)$, jež má řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. V případě, že $\beta = 0$, nemáme horní blokový tvar a musíme upravovat dál:²

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

¹ Zvolil jsem ten nejjednodušší postup. Efektivnější by bylo zvolit jako pivotovací řádek ten poslední.

² Nebo chytře: Dosadit do původní soustavy a máme rovnou žádaný tvar.

Řešení je $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Postup s využitím Cramerova pravidla: Nejprve je potřeba spočítat determinant matice soustavy

$$D := \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = \beta^3 + \beta^2 + \beta - \beta^2 - \beta^2 - \beta^2 = \beta^3 - 2\beta^2 + \beta = \beta(\beta - 1)^2$$

V případě, že $\beta \neq 0, 1$, má soustava právě jedno řešení, které můžeme najít Cramerovým pravidlem:

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = 1, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = 0, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{vmatrix} = 0$$

V prvním případě jsme si všimli, že se matice nezměnila a determinanty se pokrátili. V druhém a třetím jsme si zase všimli, že matice má dva stejné sloupce a je tedy zjevně singulární.

Případy $\beta = 0$ a $\beta = 1$ je třeba řešit zvlášť Gaussovou eliminací:

$$\begin{array}{ll} \beta = 0: & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \beta = 1: & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim (1 \ 1 \ 1 \mid 1) & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$