

# Domácí úkol 11 – řešení

1. Diagonalizujte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Tj. najděte bázi  $\mathcal{X}$  z vlastních vektorů a vyjádřete  $[\mathbf{A}]_{\mathcal{X}}$ .

Začneme výpočtem vlastních čísel. Ta se získají jako kořeny charakteristického polynomu:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 + 4 + 4(-3-\lambda) + 2(2-\lambda) + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-1) \end{aligned}$$

Vlastní čísla tedy jsou 0, -2, 1. Jdeme hledat vlastní vektory. Vždy dosadíme dané číslo do matice výše a vyřešíme jako soustavu. Pro každé  $\lambda$  budeme množinu řešení (vlastní podprostor) značit  $V_\lambda$ .

$$\lambda = 0: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = -2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \rightarrow V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Nalezli jsme tedy bázi z vlastních vektorů  $\mathcal{X} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ . V této bázi má zadané lineární zobrazení tvar  $[\mathbf{A}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Uvažujme podprostor  $V = \text{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \subset \mathbb{R}^3$ , kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte kolmý průmět vektoru  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$  do roviny  $V$ .

Příklad se dá vyřešit dvěma způsoby. Můžeme si projít oba dva.

Jako první jsme si na cvičení ukazovali přístup, který funguje, známe-li ortogonální bázi zadaného podprostoru  $V$ . Ověříme tedy, zda jsou vektory  $\vec{x}_1$  a  $\vec{x}_2$  vzájemně kolmé:  $\langle \vec{x}_1 | \vec{x}_2 \rangle = 2 - 2 + 0 = 0$ . Ano jsou! Můžeme tedy použít následující vzorec:

$$\text{proj}_V \vec{v} = \frac{\langle \vec{x}_1 | \vec{v} \rangle}{\|\vec{x}_1\|^2} \vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{x}_2 | \vec{v} \rangle}{\|\vec{x}_2\|^2} \vec{x}_2 = \frac{5}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{28}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Druhý způsob funguje obecně, akorát je o něco pracnější. Ze zadaných vektorů sestavíme matici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  a spočítáme  $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ . Dáme se tedy do toho:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že matice je diagonální. To díky tomu, že jsou na sebe vektory  $\vec{x}_1$  a  $\vec{x}_2$  kolmé. Na diagonále máme normy na druhou. Vzhledem k tomu, že je matice diagonální, počítá se její inverze snadno prostě převrácením čísel na diagonále. Nakonec máme

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 34 & -18 & 30 \\ -18 & 61 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix}$$

Nakonec

$$\mathbf{P}\vec{v} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 34 & -18 & 30 \\ -18 & 61 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Nakonec mi dovoluete ještě jednou zdůraznit, že první postup je sice jednodušší, ale funguje jen v případě, že  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots)$  tvoří *ortogonální* bázi!

**3.** Dokažte následující tvrzení:

*Nechť  $A: V \rightarrow V$  je libovolný nenulový lineární operátor. Je-li  $A$  nilpotentní (tj.  $A^k = O$  pro nějaké  $k$ ), pak  $A$  není diagonalizovatelný.*

Jak jsem napovídal, je vhodné dokazovat sporem. Předpokládejme tedy, že  $A$  je nilpotentní, tj.  $A^k = O$  a zároveň, že má bázi  $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  z vlastních vektorů. Označme  $\lambda_i$  příslušná vlastní čísla, tj.  $A\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$ . Z nilpotentnosti máme  $0 = A^k\vec{x}_i = \lambda_i^k\vec{x}_i$ . To ale znamená, že  $\lambda_i = 0$  pro každé  $i$ . To ale znamená, že  $A\vec{x}_i = 0$  pro každý vektor z báze, takže  $A$  musí být nulové zobrazení. Tím je důkaz hotov.

Poněkud ilustrativnější prezentaci téhož důkazu lze získat pomocí diagonalizace. Předpokládejme znovu, že  $A$  má bázi z vlastních vektorů  $\mathcal{X}$ . Potom je tedy  $A$  v bázi  $\mathcal{X}$  tvaru

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vyjádříme-li rovnost  $O = A^k$  v bázi  $\mathcal{X}$ , dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

což už evidentně implikuje, že  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ , a tedy  $A$  musí být nulový operátor.

Zábava na podobné téma: Dokažte, že je-li zobrazení nilpotentní, pak  $\lambda = 0$  je jeho jediné vlastní číslo.