

Lineární algebra

Daniel Gromada

1	Lineární prostory	2
1.1	Definice	2
1.2	Příklady	4
2	Lineární podprostor	7
3	Lineární závislost a nezávislost	10
4	Báze, dimenze, souřadnice	13
4.1	Báze	13
4.2	Souřadnice	17
5	Součet a průnik podprostorů	18
6	Lineární zobrazení	22
6.1	Úvod	22
6.2	Skládání lineárních zobrazení a maticové násobení	28
6.3	Transformace souřadnic	32
6.4	Lineární prostor lineárních zobrazení	33
7	Obraz a vzor při lineárním zobrazení	35
8	Řešení soustav lineárních rovnic	41
8.1	Frobeniova věta	41
8.2	Gaussova eliminace	45
8.3	Afinní prostory	51
9	Jemný náhled do světa abstraktní algebry	55
10	Determinant	59
10.1	Definice a výpočet pomocí rozvoje	61
10.2	Výpočet Gaussovou eliminací	63
10.3	Cramerovo pravidlo	67
11	Spektrální teorie matic	71
11.1	Vlastní čísla a vlastní vektory	73
11.2	Diagonalizace	77
11.3	Aplikace	81
11.4	Jordanův kanonický tvar	83
12	Skalární součin	87
12.1	Základní pojmy	89
12.2	Skalární součiny v $\mathbb{R}^n$	92

1 Lineární prostory

1.1 Definice

1.1 Definice. Podmnožinu $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ obsahující aspoň dva prvky nazveme **číselné těleso**, jestliže je uzavřená na operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Přesněji řešeno pokud pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ platí

1. $\alpha + \beta \in \mathbb{F}$,
2. $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{F}$,
3. $-\alpha \in \mathbb{F}$,
4. je-li $\alpha \neq 0$, pak $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$.

1.2 Příklad. Množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$, reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo komplexních čísel $\mathbb{C}$ jsou číselná tělesa. Naopak množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ číselným tělesem není, protože není uzavřená na opačné prvky, a tedy na odčítání. Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ rovněž není číselným tělesem, neboť není uzavřená na inverzní prvky, a tedy na dělení.

1.3 Cvičení. Dokažte, že množina $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ je číselné těleso.

1.4 Poznámky.

- Každé číselné těleso obsahuje nulu. Vskutku: Protože je neprázdné, obsahuje nějaký prvek $x \in \mathbb{F}$, s ním i opačný prvek $-x$, a i jejich součet $x + (-x) = 0$.
- Každé číselné těleso obsahuje jedničku. Vskutku: Protože obsahuje aspoň dva prvky, musí obsahovat i nějaké nenulové $x \in \mathbb{F}$. S ním i inverzní prvek x^{-1} , a i jejich součin $xx^{-1} = 1$.
- Každé číselné těleso obsahuje celou množinu racionálních čísel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$. Celá čísla kladná lze obdržet opakovaným přičítáním jedničky, záporná jsou k nim opačná a zlomky dostaneme dělením.

1.5 Poznámka. V dalším textu budeme často psát pouze *těleso*, nikoliv *číselné těleso*. Je to záměr. Existuje totiž matematický pojem *těleso*, jenž je zobecněním toho, čemu my říkáme číselné těleso. Všude, kde budeme zmiňovat pouze těleso a nikoliv číselné těleso lze vskutku použít i tuto obecnější strukturu, kterou však definujeme až později, abychom neodváděli pozornost od podstaty tohoto předmětu.

1.6 Definice. Necht $\mathbb{F}$ je těleso. **Lineární prostor**¹ nad tělesem $\mathbb{F}$ je neprázdná množina L vybavená operacemi $\oplus: L \times L \rightarrow L$ a $\odot: \mathbb{F} \times L \rightarrow L$ splňujícími následující osm axiomů.

1. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x} \quad (\text{komutativita sčítání})$$

2. Pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí

$$(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) \quad (\text{asociativita sčítání})$$

¹ Častěji se používá termín *vektorový prostor*, zde se budeme držet terminologie používané na FEL doc. Velebilem.

3. Existuje $\vec{y} \in L$ takové, že pro každé $\vec{x} \in L$ platí

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{x} \quad (\text{existence nulového vektoru})$$

Tento vektor $\vec{y}$ budeme dále značit symbolem $\vec{0}$ a nazývat **nulový vektor**.

4. Pro každé $\vec{x} \in L$ existuje $\vec{y} \in L$ tak, že

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{0} \quad (\text{existence opačných vektorů})$$

Tento vektor $\vec{y}$ budeme dále značit symbolem $-\vec{x}$ a nazývat **opačný** k $\vec{x}$.

5. Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ a $\vec{x} \in L$ je

$$\alpha \odot (\beta \odot \vec{x}) = (\alpha\beta) \odot \vec{x} \quad (\text{asociativita násobení})$$

6. Pro každé $x \in L$ platí

$$1 \odot \vec{x} = \vec{x} \quad (\text{jednička je neutrální k } \odot)$$

7. Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ a $\vec{x} \in L$ platí

$$(\alpha + \beta) \odot \vec{x} = (\alpha \odot \vec{x}) \oplus (\beta \odot \vec{x}) \quad (\text{distributivita})$$

8. Pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí

$$\alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (\alpha \odot \vec{x}) \oplus (\alpha \odot \vec{y}) \quad (\text{distributivita})$$

Prvkům L budeme říkat **vektory**, prvkům $\mathbb{F}$ budeme říkat **skaláry**, operaci $\oplus$ budeme říkat **sčítání vektorů**, operaci $\odot$ budeme říkat **násobení vektoru skalárem**.

1.7 Poznámka. Uvědomme si, že bez ohledu na to, jaké vlastnosti zadané operace splňují, umožňují nám upravovat rovnice tak, jak jsme zvyklí. Platí-li například $\vec{x} = \vec{y}$, pak musí nutně platit i $\vec{x} \oplus \vec{z} = \vec{y} \oplus \vec{z}$. Díky existenci opačného prvku k $\vec{z}$ lze naopak z druhé rovnice získat první a vidíme, že obě jsou tedy ekvivalentní. Rozmyslete si, jak to funguje s násobením.² Znamená to tedy, že řešíme-li rovnici $\vec{a} \oplus \vec{x} = \vec{b}$, je jejím řešením, jak bychom čekali, vektor $\vec{x} = \vec{b} \oplus (-\vec{a})$. Jak vzápětí zjistíme, opačný vektor k zadanému je určen jednoznačně,³ takže je to řešení jediné.

1.8 Věta (Vlastnosti lineárních prostorů). Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Potom platí následující.

1. V L existuje právě jeden nulový vektor.
2. Ke každému vektoru $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden opačný vektor.
3. Rovnost $\alpha \odot \vec{x} = \vec{0}$ platí právě tehdy, když $\alpha = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{0}$.
4. Pro každé $\vec{x} \in L$ platí $-\vec{x} = (-1) \odot \vec{x}$.

Důkaz. 1. Nechť $\vec{o}_1$ a $\vec{o}_2$ oba splňují definici nulového vektoru (bod 3. z definice 1.6). Potom však $\vec{o}_1 = \vec{o}_1 \oplus \vec{o}_2 = \vec{o}_2$.

2. Buď $\vec{x} \in L$ a nechť $\vec{y}$ a $\vec{z}$ oba splňují definici opačného vektoru k $\vec{x}$ (bod 4. z definice 1.6). Platí tedy $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{0} = \vec{x} \oplus \vec{z}$ (využíváme již dokázanou jednoznačnost nulového vektoru). Znamená to však, že $\vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{0} = \vec{y} \oplus \vec{x} \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus \vec{y} \oplus \vec{z} = \vec{0} \oplus \vec{z} = \vec{z}$.

3. V tomto bodě potřebujeme ukázat tři věci:

- a) Pro každé $x \in L$ platí $0 \odot \vec{x} = \vec{0}$,

² Pozor na nulu!

³ To axiomy přímo neříkají!

b) Pro každé $\alpha \in F$ platí $\alpha \odot \vec{0} = \vec{0}$,

c) Je-li pro nějaké $\alpha \in F$ a $\vec{x} \in L$ $\alpha \odot \vec{x} = \vec{0}$, pak nutně $\alpha = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{0}$.

V prvním případě si můžeme všimnout, že $\vec{x} \oplus (0 \odot \vec{x}) = (1 \odot \vec{x}) \oplus (0 \odot \vec{x}) = (1+0) \odot \vec{x} = 1 \odot \vec{x} = \vec{x}$. Z rovnice $\vec{x} \oplus (0 \odot \vec{x}) = \vec{x}$ pak už plyne, že $0 \odot \vec{x} = \vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}$. V druhém případě postupujeme analogicky pozorující, že $(\alpha \odot \vec{x}) \oplus (0 \odot \vec{x}) = \alpha \odot \vec{x}$. Pro opačnou implikaci budeme předpokládat, že $\alpha \odot \vec{x} = \vec{0}$ a že $\alpha \neq 0$. Dokážeme $\vec{x} = \vec{0}$. Vskutku: $\vec{x} = 1 \odot \vec{x} = (\alpha^{-1}\alpha) \odot \vec{x} = \alpha^{-1} \odot (\alpha \odot \vec{x}) = \alpha^{-1} \odot \vec{0} = \vec{0}$.

V posledním bodě je nutné ukázat, že vektor $(-1) \odot \vec{x}$ splňuje definující vlastnost opačného vektoru k $\vec{x}$ (bod 4. definice lineárního prostoru). Studujeme tedy $\vec{x} \oplus ((-1) \odot \vec{x}) = (1 \odot \vec{x}) \oplus ((-1) \odot \vec{x}) = (1-1) \odot \vec{x} = 0 \odot \vec{x} = \vec{0}$. $\square$

1.9 Poznámka. Ve studiu elementárních vlastností operací v lineárním prostoru bychom měli pokračovat. Je například vhodné z komutativního zákona pro dva sčítance matematickou indukcí odvodit, že na pořadí sčítanců nezáleží při libovolně dlouhém součtu. Totéž můžeme dokázat pro asociativní zákon. To nám umožní závorky při sčítání zcela vynechat. Tyto důkazy jsou velmi technické, proto je zde nebudeme provádět.⁴

Od příští kapitoly už nebudeme psát ty kroužky kolem operací a budeme operace s vektory zapisovat tak, jak jsme zvyklí u čísel. Budeme si pamatovat, že násobení má přednost, což nám opět umožní odstranit nějaké zbytečné závorky. Budeme psát $\vec{x} - \vec{y}$ namísto $\vec{x} + (-\vec{y})$, budeme psát αx namísto $\alpha \cdot x$ a tak podobně. V naší hlavě by však měla zůstat vzpomínka na to, že to nejsou operace s čísly, ale s vektory a že tedy sčítání vektorů $\vec{x} + \vec{y}$ nemá se sčítáním čísel $\alpha + \beta$ společné a priori nic než značku $+$ a výše uvedených osm axiomů.⁵

1.2 Příklady

Následovat bude sada příkladů lineárních prostorů. Důkaz, že jde vskutku o lineární prostory (ověření platnosti osmi axiomů), necháváme na čtenáři. Pro zbytek kapitoly předpokládáme, že F je nějaké pevně zvolené těleso, abychom to nemuseli stále opakovat. Představujte si, že $F = \mathbb{R}$.

1.10 Příklad (Aritmetické vektory). Položme

$$\mathbb{F}^n = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right) \right\}$$

a definujeme operace

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

⁴ Většinu z vás asi moc ne bavil ani ten důkaz věty výše. Věřím však, že nějaké fanoušky si tyto elementární úvahy našly.

⁵ Axiomy pro počítání s čísly jsme zde zatím neformulovali, necháme si to na později. Nemělo by vás však překvapit, že uvedených osm mezi ně patří.

Dostáváme tak lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Dokažte! Jak vypadá nulový vektor? Jak k zadanému vektoru konstruuje opačný?

1.11 Příklad (Matice). Položme

$$\mathbb{F}^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{F} \text{ pro } i = 1, \dots, m \text{ a } j = 1, \dots, n \right\}.$$

Tabulky čísel z množiny nazýváme **matice** (rozměru $m \times n$). Pro danou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ značíme $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{F}$ její **prvek** na i -tém řádku a j -tém sloupci. Stejně jako výše definujeme operace opět *po prvcích*. Tedy

$$[\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}]_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}, \quad [\alpha \odot \mathbf{A}]_{ij} = \alpha \mathbf{A}_{ij}.$$

Důkaz, že jde o lineární prostor plyne z předchozího příkladu, neboť $\mathbb{F}^{m \times n}$ je prakticky totéž co $\mathbb{F}^{mn}$ až na to, že prvky nejsou uspořádány do jednoho sloupečku, ale do tabulky. Naopak si můžeme povšimnout, že $\mathbb{F}^n$ je opravdu přesně totéž, co $\mathbb{F}^{n \times 1}$.

1.12 Příklad (Eukleidovské vektory). Zvolíme-li v rovině pevný počátek O , pak orientované úsečky s počátečním bodem O tvoří lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, kde operace jsou definovány způsobem známým z fyziky – sčítání pomocí doplnění na rovnoběžník a násobení škálováním délky.

1.13 Příklad. Jednoprvková množina je lineárním prostorem nad jakýmkoliv tělesem. Rozmyslete si, jak musejí být definovány operace.

1.14 Příklad. Těleso $\mathbb{F}$ je lineárním prostorem nad $\mathbb{F}$ vezmeme-li $\oplus = +$ a $\odot = \cdot$.

1.15 Příklad. Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je lineárním prostorem nad $\mathbb{R}$ (nebo též nad jakýmkoliv jiným číselným tělesem) vezmeme-li jako $\oplus$ sčítání komplexních čísel a jako $\odot$ násobení komplexních čísel.

1.16 Příklad (Posloupnosti). Množina všech posloupností

$$\mathbb{F}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{F} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}\}$$

je lineárním prostorem vzhledem k operacím definovaným po prvcích:

$$(x_n) \oplus (y_n) = (x_n + y_n), \quad \alpha \odot (x_n) = (\alpha x_n).$$

1.17 Příklad (Funkce). Buď A libovolná množina. Potom množina všech funkcí

$$\mathbb{F}^A = \{f: A \rightarrow \mathbb{F}\}$$

tvoří lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ vzhledem k operacím definovaným bodově

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \odot f)(x) = \alpha f(x).$$

Speciálním případem jsou posloupnosti (vezmeme-li $A = \mathbb{N}$), funkce $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ (pro $A = \mathbb{F}$) ale třeba i aritmetické vektory (vezmeme-li $A = \{1, \dots, n\}$).

1.18 Příklad. Polynom s proměnnou x a koeficienty z tělesa $\mathbb{F}$ je výraz typu

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n, \quad \text{kde } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}.$$

Čísla α_i nazýváme **koeficienty** daného polynomu. Definujeme jeho **stupeň** jako index nejvyššího nenulového koeficientu $\deg p(x) = \max_{\alpha_i \neq 0} i$. Pro **nulový polynom** $o(x) = 0$ pokládáme $\deg o(x) = -\infty$. Množinu všech polynomů s proměnnou x a koeficienty v $\mathbb{F}$ značíme $\mathbb{F}[x]$.

Jedná se o lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ vzhledem k operacím

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) \oplus (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n) \\ = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x^n \\ \gamma \odot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = (\gamma\alpha_0 + \gamma\alpha_1 x + \cdots + \gamma\alpha_n x^n) \end{aligned}$$

1.19 Definice. Polynomiální funkce je funkce, jejíž funkční hodnoty lze spočítat dosazením vstupní proměnné do polynomu.

Na střední škole jste mezi polynomy a polynomiálními funkcemi příliš nerozlišovali. Rozdíl tam však je: Zatímco polynom je určen svými koeficienty, polynomiální funkce je určena funkčními hodnotami prvků definičního oboru. Polynomiální funkce má pevně stanoven definiční obor, kdežto do polynomu můžeme dosazovat ledacos.⁶ Zaměříme-li se na polynomiální funkce typu $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, tedy budeme-li požadovat, že definičním oborem je rovněž $\mathbb{F}$, pak se bude zatím jednat o rozdíl pouze kosmetický:

1.20 Věta. Koeficienty (obecně komplexního) polynomu jsou určeny jednoznačně funkčními hodnotami v racionálních bodech $x \in \mathbb{Q}$.

1.21 Důsledek. Pro libovolné číselné těleso $\mathbb{F}$ máme vzájemně jednoznačný vztah mezi polynomy $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ a polynomiálními funkcemi $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$.

Věta se dá dokázat různými způsoby, nebudeme to zde dělat. Rozmyslete si například, že tvrzení stačí ukázat pro nulovou polynomiální funkci. V analýze uvidíte, že každý nenulový polynom má limitu $\pm\infty$ pro $x \rightarrow +\infty$. Zdůrazněme zde však, že věta opravdu platí pouze pro *číselná* tělesa, tedy ta uvnitř $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$.

1.22 Příklad. Položme

$$\mathbb{F}^{\leq n}[x] = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg p(x) \leq n\} = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Opět se jedná o lineární prostor vzhledem k operacím z $\mathbb{F}[x]$ zúženým na tuto podmnožinu. Všimněme si, že zde není nutné ověřovat osm axiomů – ty už máme (skoro) všechny ověřené. Ověřit je nutné pouze ty s existenčním kvantifikátorem. Je však potřeba ještě ověřit jednu věc navíc: U operací $\oplus$ a $\odot$ jsme zúžili definiční obor, ale není předem jasné, že výsledek operací padne opět do zadané podmnožiny. Jinými slovy, schází ověřit, že operace jsou tzv. *dobře definované*.

Povšimněme si opět, že $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ je prakticky totéž, co $\mathbb{F}^{n+1}$.

⁶ Třeba i matice až se je naučíme násobit.

1.23 Otázka. Existuje vůbec nějaký „konečněrozměrný“⁷ lineární prostor, který by nebyl „prakticky stejný jako“⁸ $\mathbb{F}^n$?

1.24 Příklad. Položme $L = (0, +\infty)$. Pro $x, y \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Dokažte, že L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Jedná se o odpověď na předchozí otázku, nebo by šlo prvky L parametrizovat nějak vhodněji a opět dostat $\mathbb{R}^n$?

2 Lineární podprostor

Od teď budeme operace na všech lineárních prostorech značit symboly $+$ a $\cdot$, přičemž značku pro násobení budeme většinou vynechávat.

Vzpomeňme si na pozorování z příkladu 1.22, kde jsme si všimli, že podmnožina lineárního prostoru je opět lineární prostor, jestliže lze operace na podmnožinu zúžit. Toto pozorování nyní formalizujeme:

2.1 Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Neprázdna podmnožina $V \subseteq L$ se nazývá **lineární podprostor** L , jestliže je navíc

1. uzavřená na sčítání vektorů: pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $\vec{x} + \vec{y} \in V$ a
2. uzavřená na násobení vektoru skalárem: pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\vec{x} \in V$ je $\alpha\vec{x} \in V$.

Je-li to splněno, značíme $V \leq L$.

2.2 Věta. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a V jeho lineární podprostor. Potom V je lineárním prostorem nad $\mathbb{F}$ vzhledem k operacím z L zúženým na V . Speciálně V obsahuje nulový vektor $\vec{0} \in L$.

Důkaz. Přímo z definice lineárního podprostoru plyne, že operace $+$ a $\cdot$ zúžené na V vracejí opět vektor z $V \subseteq L$. Operace tedy jsou dobře definované. Všechny axiomy lineárního prostoru kromě bodů 3. a 4. jsou uvozené kvantifikátory *pro každé*. Jsou-li splněny v L , musí být speciálně splněny i ve V . Zbývá ukázat existenci nulového vektoru ve V a opačného vektoru ke každému $\vec{x}$ ve V . Množina V je z definice neprázdna, obsahuje tedy nějaký vektor $\vec{x}$ a podle věty 1.8 máme $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \in V$. Navíc máme i $-\vec{x} = (-1)\vec{x} \in V$. $\square$

Sami si rozmyslete, že následující jsou příklady lineárních podprostorů.

2.3 Příklad. Jednoprvková množina obsahující nulový vektor $\{\vec{0}\} \subseteq L$ je lineárním podprostorem libovolného lineárního prostoru – tím nejmenším. Rovněž tak celý prostor je vždy podprostorem $L \leq L$ – tím největším. Naopak prázdná množina ani žádná jiná množina, která nulový vektor neobsahuje, nemůže být lineárním podprostorem.

2.4 Příklad. Buď L lineární prostor a $\vec{x} \in L$. Potom množina $\{\alpha\vec{x} \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$ je lineární podprostor L . Mohli bychom jej nazývat *přímka* určená vektorem $\vec{x}$.

2.5 Příklad. Množina všech polynomů stupně nejvýše n je lineárním podprostorem prostoru všech polynomů $\mathbb{F}^{\leq n}[x] \leq \mathbb{F}[x]$.

⁷ Později tento pojem definujeme přesně. Teď máme na mysli asi to, že prvky jsou určeny konečným počtem parametrů z $\mathbb{F}$

⁸ I tomuto později dáme formální význam.

2.6 Příklad. Necht' je dána soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých s nulovou pravou stranou

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= 0 \\ \gamma x + \delta y &= 0\end{aligned}$$

pro nějaké pevně dané $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Množina vektorů $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, jenž představují všechna řešení soustavy, je lineárním podprostorem $\mathbb{R}^2$. Naopak pokud by pravá strana nebyla nulová, nemohlo by se jednat o podprostor, neboť by množina zjevně neobsahovala nulový vektor.

2.7 Příklad. Pro čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ definujeme její **stopu** $\text{Tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ii}$ jako součet diagonálních prvků. Množina matic s nulovou stopou je lineárním podprostorem $\mathbb{F}^{n \times n}$.

2.8 Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Buďte $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Vektor $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \in L$ nazveme **lineární kombinace** vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazveme **koefficienty** této lineární kombinace.

2.9 Příklad. Představte si, že jste ředitelkou cukrárny a váš dodavatel surovin právě změnil ceník. Potřebujete tedy znovu nacenit své zákusky a proto by se vám hodilo znát náklady na jejich výrobu. Pro jednoduchost se zaměříme pouze na suroviny a práci nechme stranou. Napadne vás tedy udělat si tabulku, kde do řádků napíšete své výrobky a do sloupečků množství potřebných surovin. Do druhé tabulky si napíšete na řádky suroviny a vedle jejich cenu. Zajímají vás vstupní náklady pro jednotlivé laskominy, což můžete spočítat tak, že každý sloupeček tabulky vlevo (sloupečky odpovídají jednotlivým surovinám) vynásobíte cenou suroviny a výsledky posčítáte. Výpočet může vypadat třeba takto⁹

$$\begin{pmatrix} 0 & 1,5 & 0,2 & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 1 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & 1,5 & 0,4 & 0 & 1 \\ 1,5 & 1 & 0,3 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,25 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$0,2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + 0,25 \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,375 \\ 8,325 \\ 7,475 \\ 6,55 \end{pmatrix}$$

Připomeňme, že komutativita a asociativita sčítání nám umožňuje hovořit o součtu (sumě) více než dvou vektorů aniž bychom specifikovali pořadí vektorů či operací. Vektorů v součtu však musí být konečně mnoho.¹⁰ Nám se bude hodit dodefinovat i co je to součet prázdné množiny vektorů.

⁹ První řádek tak trochu vypadá jako bychom násobili matici s vektorem, že? Pardon!

¹⁰ Pokud bychom měli nekonečně mnoho vektorů, mohli bychom se ptát ke kterému vektoru se částečné součty *blíží* a definovat nekonečný součet jako limitu. Na to je však nutné zodpovědět otázku, co znamená *blížit se* – definovat pojem vzdálenosti.

2.10 Úmluva. Výsledkem prázdné sumy vektorů bude vždy nulový vektor $\vec{0}$. Nulový vektor je tedy lineární kombinací libovolné – i prázdné – množiny vektorů.

2.11 Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Pro množinu vektorů $M \subseteq L$ definujeme její **lineární obal** $\text{span } M$ jako množinu všech možných lineárních kombinací prvků z M , tedy

$$\text{span } M = \{\alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k \mid k \in \mathbb{N}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}\}.$$

Prvky množiny M nazýváme **generátory** příslušného lineárního obalu.

2.12 Poznámky.

- Lineární obal prázdné množiny je jednoprvková množina obsahující nulový vektor¹¹ $\text{span } \emptyset = \{\vec{0}\}$.
- Je-li množina M konečná, tj. $M = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, pak lze definici zjednodušit:

$$\text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} = \{\alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Chceme-li provést kombinaci menšího počtu vektorů (ne nutně všech), stačí některé koeficienty volit nulové. Chceme-li provést kombinaci vektorů, kde se jeden z nich vyskytuje vícekrát, je namísto toho možné příslušné koeficienty sečíst a daný vektor použít jen jednou. Mimo to zhusta využíváme faktu, že lze součet libovolně přeuspořádat.

- Je-li množina M nekonečná, je nutná naše obecná definice, kde vybíráme vždy jen konečnou k -prvkovou podmnožinu, ze které děláme lineární kombinace.

2.13 Věta. Buď L lineární prostor a $M \subseteq L$. Pak $\text{span } M$ je lineární podprostor L .

Důkaz. Každý lineární obal obsahuje nulový vektor, neboť ten je lineární kombinací prázdné množiny. Lineární obal je tedy vždy neprázdný. Zbývá ověřit uzavřenost na sčítání a násobení.

Vezměme tedy dva libovolné vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \text{span } M$. Chceme ukázat, že $\vec{x} + \vec{y} \in \text{span } M$. Fakt, že $\vec{x} \in \text{span } M$ znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}_0$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in M$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k$. Podobně $\vec{y}$ musí být tvaru $\vec{y} = \beta_1 \vec{y}_1 + \cdots + \beta_l \vec{y}_l$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}_0$, $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l \in M$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{F}$. Nyní máme

$$\vec{x} + \vec{y} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k + \beta_1 \vec{y}_1 + \cdots + \beta_l \vec{y}_l,$$

což je evidentně lineární kombinace prvků z M , a tedy patří do $\text{span } M$.

Stejně se to udělá s násobením. Pro $\gamma \in \mathbb{F}$ a $\vec{x} \in \text{span } M$ máme

$$\gamma \vec{x} = \gamma(\alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k) = \gamma \alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \gamma \alpha_k \vec{x}_k \in \text{span } M. \quad \square$$

¹¹ V definici jsme záměrně dovolili, aby počet sčítanců v součtu byl nulový, což dá v souladu s naší úmluvou nulový vektor.

2.14 Cvičení. Dokažte, že pro $M \subseteq L$ je $\text{span } M$ tím *nejmenším* lineárním prostorem obsahujícím M – tedy že všechny další podprostory tento daný prostor již obsahují.¹² Výše jsme ukázali, že $\text{span } M$ je lineární podprostor, ukažte tedy, že pro každý další podprostor $V \leq L$ takový, že $M \subseteq V$ platí $\text{span } M \leq V$. Rozmyslete si, že toto tvrzení lze taky zformulovat následujícím způsobem: Lineární obal je průnik všech podprostorů obsahujících M .

$$\text{span } M = \bigcap \{V \mid M \subseteq V \leq L\}$$

3 Lineární závislost a nezávislost

3.1 Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Buďte $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Posloupnost vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ se nazývá **lineárně závislá**, jestliže lze zapsat nulový vektor $\vec{0} \in L$ jako netriviální lineární kombinaci vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. V opačném případě se posloupnost nazývá **lineárně nezávislá**. To tedy nastává tehdy, když jediná lineární kombinace vektorů z posloupnosti, která dává nulový vektor, je ta triviální. Symbolicky:

$$\begin{aligned} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ je LN} &\Leftrightarrow \\ &(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow ((\forall i \in \{1, \dots, n\})(\alpha_i = 0))) \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ je LZ} &\Leftrightarrow \\ &(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0} \wedge ((\exists i \in \{1, \dots, n\})(\alpha_i \neq 0))) \end{aligned}$$

3.2 Pozorování.

- Lineární (ne)závislost nezávisí na pořadí vektorů v posloupnost.
- Je-li v posloupnosti nějaký vektor dvakrát, je posloupnost automaticky lineárně závislá.
- Prázdná posloupnost je automaticky lineárně nezávislá.
- Je-li v posloupnosti nulový vektor, je posloupnost automaticky lineárně závislá.
- Posloupnost s jedním vektorem $(\vec{x})$ je lineárně závislá právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{0}$.
- Posloupnost se dvěma vektory $(\vec{x}, \vec{y})$ je lineárně závislá právě tehdy, když je jeden násobkem druhého.

3.3 Věta.

1. Odebráním libovolného počtu vektorů z lineárně nezávislé posloupnosti vznikne lineárně nezávislá posloupnost.
2. Přidáním libovolného počtu vektorů do lineárně závislé posloupnosti vznikne lineárně závislá posloupnost.

¹² Řekli bychom *nejmenší* vzhledem k relaci *být podmnožinou* případně *být podprostorem*. Nad číselným tělesem budou mít všechny netriviální lineární prostory nekonečně (nespočetně) mnoho prvků. Porovnávat jejich velikost počtem prvků tedy nedává smysl.

Důkaz. V první řadě si vzpomeňme, že lineární závislost a nezávislost nezávisí na pořadí vektorů v posloupnosti. *Bez újmy na obecnosti*¹³ tedy můžeme předpokládat, že odebíráme vektory od konce, resp. přidáváme je na konec posloupnosti.

Nyní dokážeme druhé tvrzení. Půjde nám to snadněji, když napíšeme trochu formálněji, co vlastně říká: Necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je posloupnost vektorů z L a necht $k < n$. Je-li posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ lineárně závislá, pak je i celá posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ lineárně závislá. To je třeba dokázat. Nyní ještě dosadme definici lineární závislosti. Předpoklad implikace říká, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je lineárně závislá, tedy že existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový a platí $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}$. Z toho je třeba vyvodit závěr, že i posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je lineárně závislá. Musíme tedy najít konstanty $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$, které nejsou všechny nulové a platí $\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n = \vec{0}$. To je ale docela jednoduché. Stačí brát $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_k = \alpha_k, \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$.

Nakonec si můžeme všimnout, že první tvrzení je pouze obměna¹⁴ druhého. Vskutku, máme-li posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ vektorů z L a $k < n$, uvedené výroky říkají

1. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ LN $\Rightarrow (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ LN,
2. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ LZ $\Rightarrow (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ LZ. □

3.4 Cvičení. Část 1. předchozí věty lze dokázat i přímo. Zkuste to!

3.5 Úloha. Rozhodněte o lineární nezávislosti posloupnosti vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ v $\mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zajímá-li nás, zde je tato posloupnost lineárně nezávislá, musíme řešit rovnici

$$\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2 + \gamma \vec{x}_3 = \vec{0}.$$

Dosadíme příslušné vektory:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A vidíme, že tato podmínka je ekvivalentní soustavě tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

¹³ *Bez újmy na obecnosti*, zkratkou BÚNO (anglicky *without loss of generality* – WLOG), je oblíbená formulka používaná v důkazech. Bývá jí uvozen dodatečný předpoklad, který ulehčí formulaci důkazu, avšak snadno se lze přesvědčit o tom, že ve zbylých případech by se tvrzení dokazovalo velmi obdobně. Umožňuje nám důkaz očistit od technických detailů, a tak zlepšit jeho čitelnost. Často jde o to, že nezávisí na pořadí nějakých objektů, a tak můžeme předpokládat, že jsou seřazené podle velikosti, případně si jinak vhodně vybrat jejich pořadí.

¹⁴ Pro implikaci $A \Rightarrow B$ nazýváme její *obměnou* $\neg B \Rightarrow \neg A$. Z hlediska logiky jde o ekvivalentní výrok, a tak dokážeme-li jeden, pak platí i druhý.

Nyní si můžeme všimnout, že druhá rovnice je součtem první a třetí, a je tedy v soustavě nadbytečná. Řešíme tak vlastně soustavu:

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0\end{aligned}$$

Soustava má zjevně řešení – to má totiž soustava s nulovou pravou stranou vždy. Podstatné je, že tato soustava má i netriviální řešení. Zdá se totiž, že za proměnnou γ můžeme dosadit cokoliv a snadno dopočítáme zbylé proměnné. Dosadíme tedy $\gamma = 1$, pak snadno dopočítáme $\alpha = \beta = -1$. Podařilo se nám tedy nakombinovat netriviálně nulový vektor z vektorů posloupnosti a sice jako $\vec{0} = -\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3$. Závěr tedy zní, že posloupnost je lineárně závislá.

Kromě toho si můžeme všimnout, že splňuje i jakousi intuitivnější definici lineární závislosti a sice, že je v ní nějaký vektor navíc, který je již kombinací ostatních. To lze snadno dostat přeuspořádáním výše obdržené rovnosti: přičtením $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ dostaneme, že $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Snadno si rozmyslíte, že to platí o každém jednotlivém vektoru, že je lineární kombinací ostatních.

Níže dokážeme, že v každé lineárně závislé posloupnosti je nějaký vektor kombinací ostatních. Musí to ale platit o každém vektoru z posloupnosti, že je kombinací ostatních? Zkuste najít posloupnost vektorů, kde to tak není (přestože je lineárně závislá).

3.6 Věta (Alternativní definice lineární závislosti). Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je lineárně závislá.
2. Jeden z vektorů posloupnosti je lineární kombinací ostatních.
3. Jeden z vektorů posloupnosti je lineární kombinací předchozích (tedy existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\vec{x}_i \in \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}\}$).

Důkaz. Abychom dokázali ekvivalenci těchto tří výroků, stačí dokázat řetězec implikací $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (2)$: Zjevné.

$(2) \Rightarrow (1)$: Předpokládáme, že existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\vec{x}_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \vec{x}_i$ pro nějaké skaláry α_i , $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Od této rovnosti odečteme $\vec{x}_j$ a máme $\vec{0} = \sum_i \alpha_i \vec{x}_i$, kde pokládáme $\alpha_j = -1$. Dokázali jsme tedy napsat nulový vektor jako netriviální lineární kombinaci vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.

$(1) \Rightarrow (3)$: Předpokládáme, že $\vec{0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ přičemž ne všechny α_i jsou nulové. Vezmeme ten nejvyšší index j , pro který je $\alpha_j \neq 0$, tedy $j := \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$. Potom lze v rovnosti vyjadřující nulový vektor osamostatnit $\vec{x}_j$ jako $\vec{x}_j = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \vec{x}_i$. $\square$

3.7 Věta. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, a necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost vektorů z L . Necht dále $\vec{v} \in L$ je vektor takový, že $\vec{v} \notin \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$. Potom je posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{v})$ rovněž lineárně nezávislá.

Důkaz. Použijeme alternativní definici lineární závislosti 3. z předchozí věty. Je-li $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost, pak žádný z vektorů posloupnosti není lineární kombinací předchozích. Z předpokladu věty plyne, že totéž platí pro posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{v})$. $\square$

4 Báze, dimenze, souřadnice

4.1 Báze

Náš cíl pro tuto kapitolu je zavést pojem *souřadnic*. Na to nejdřív potřebujeme nějaký souřadný systém, který bude určen nějakou sadou význačných směrů, tedy vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Přáli bychom si souřadný systém zavést tak, aby v něm šlo každý vektor $\vec{v} \in L$ jednoznačně reprezentovat. Tedy aby každé $\vec{v} \in L$ šlo zapsat jako lineární kombinaci $\vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$ jednoznačným způsobem. Číslům, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ pak budeme říkat *souřadnice* vektoru $\vec{v}$.

Žádáme tak dvě věci: existenci vhodných koeficientů a jejich jednoznačnost. Nejprve charakterizujeme existenci:

4.1 Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Řekneme, že posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ vektorů z L **generuje** celý prostor L , jestliže $L = \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$.

Teď se zaměříme na jednoznačnost. Tu by měl charakterizovat pojem lineární nezávislosti:

4.2 Věta. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když lze každý vektor $\vec{v} \in L$ napsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nejvýše jedním způsobem.

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$ je zřejmá. Definice lineární nezávislosti totiž vyžaduje právě to, že nulový vektor lze zapsat jako lineární kombinaci právě jedním způsobem.

Pro implikaci $\Rightarrow$ předpokládejme, že vektor $\vec{v}$ lze zapsat dvěma způsoby jako

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n.$$

Zaměříme se na druhou rovnost a přesuňme všechny členy na jednu stranu. Dostaneme

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{x}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{x}_n = \vec{0}.$$

Předpoklad lineární nezávislosti posloupnosti $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ pak znamená, že $\alpha_i - \beta_i = 0$, tj. $\alpha_i = \beta_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. $\square$

4.3 Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ nazýváme **báze** L , jestliže je lineárně nezávislá a generuje L .

4.4 Definice. V $\mathbb{F}^n$ (nad $\mathbb{F}$) definujeme posloupnost vektorů

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Budeme jí říkat **kanonická báze** prostoru $\mathbb{F}^n$.

4.5 Věta. Bud L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Následující výroky jsou ekvivalentní.

1. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze L ,
2. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je minimální (vzhledem k inkluzi)¹⁵ posloupnost generující L ,
3. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá posloupnost v L .

Důkaz. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Báze je z definice generující. Posloupnost generátorů lze zmenšit právě tehdy, když je jeden z vektorů lineární kombinací ostatních. To je podle alternativní definice ekvivalentní lineární závislosti posloupnosti.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Báze je z definice lineárně nezávislá. Není-li generující, tj. existuje-li $\vec{v} \notin \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, je podle věty 3.7 možné lineárně nezávislou posloupnost zvětšit přidáním vektoru $\vec{v}$. Snadno se přesvědčíme o opaku: Je-li $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v})$ lineárně nezávislá, pak podle alternativní definice lineární závislosti vektor $\vec{v}$ nemůže být lineární kombinací ostatních. $\square$

Chtěli bychom nyní ukázat, že každá báze má stejnou velikost. Pokud se nám to podaří, můžeme ono *vzhledem k inkluzi* ve větě výše nahradit prostým *co do velikosti*.

4.6 Lemma (Steinitzova věta o výměně / Exchange lemma). Necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost vektorů z lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$. Necht je G konečná množina generující L , $l = |G|$. Pak $l \geq k$ a existují vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{l-k} \in G$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{l-k})$ generuje L .

Důkaz. Budeme dokazovat matematickou indukcí. Pro $k = 0$ je tvrzení zřejmé, bereme prostě celou množinu G .

Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou k -prvkovou lineárně nezávislou posloupnost a uvažujme nějakou $(k+1)$ -prvkovou $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1})$, pro kterou chceme tvrzení dokázat. Z indukčního předpokladu najdeme generující posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{l-k})$. Zbývá ukázat, že můžeme vyměnit některý z vektorů $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{l-k}$ za vektor $\vec{x}_{k+1}$.

Vzhledem k tomu, že nalezená posloupnost je generující, platí, že z ní můžeme nakombinovat vektor $\vec{x}_{k+1}$. Najdeme tedy koeficienty příslušné lineární kombinace

$$\vec{x}_{k+1} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k + \beta_1 \vec{y}_1 + \dots + \beta_{l-k} \vec{y}_{l-k}.$$

Protože předpokládáme, že posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1})$ je lineárně nezávislá, musí platit, že aspoň jeden z koeficientů $\beta_1, \dots, \beta_{l-k}$ je nenulový (a tedy $l \geq k+1$). Označme příslušný index j . Potom platí, že $\vec{y}_j$ lze nakombinovat z vektorů posloupnosti $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{j-1}, \vec{y}_{j+1}, \dots, \vec{y}_{l-k})$, a tedy musí tato posloupnost generovat celé L . $\square$

¹⁵ Inkluze je jiné označení relace *být podmnožinou*. Je menší vzhledem k inkluzi znamená prostě je podmnožinou. Vyberáme-li množinu *minimální vzhledem k inkluzi* s nějakou vlastností, vybíráme takovou, že žádná její podmnožina tuto vlastnost nemá. Zde ve skutečnosti nemáme množiny, ale posloupnosti, nicméně princip je stejný. Chceme říct, že žádná podposloupnost už není generující. Mimochoodem záměrně používáme slovo *minimální* a nikoliv *nejmenší* neboť matematici v těchto slovech mohou vidět drobný rozdíl: Minimální znamená, že neexistuje menší (neexistuje generující podposloupnost), kdežto nejmenší by znamenala, že každá další je větší (to v tomto případě není pravda).

4.7 Věta. Každá báze lineárního prostoru má stejnou velikost.

Důkaz. Budte $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l)$ báze nějakého lineárního prostoru. Protože jsou obě generující i lineárně nezávislé, máme podle Steinitzovy věty jednak $k \leq l$ a jednak $l \leq k$, tedy dohromady $k = l$.

4.8 Definice. Pro lineární prostor L definujeme jeho **dimenzi** $\dim L$ jako počet prvků nějaké jeho báze. Pokud L (konečnou) bázi nemá, řekneme, že má nekonečnou dimenzi, $\dim L = \infty$.

4.9 Příklad.

- $\dim\{\vec{0}\} = 0$. (Dimenze jednoho bodu je nula.)
- $\dim \text{span}\{\vec{x}\} = 1$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}$. (Dimenze přímky je jedna.)
- $\dim \mathbb{F}^n = n$. V $\mathbb{F}^n$ totiž máme n -člennou kanonickou bázi.
- $\dim \mathbb{F}[x] = \infty$. V $\mathbb{F}[x]$ totiž najdeme n -prvkovou lineárně nezávislou posloupnost pro každé $n \in \mathbb{N}$ a sice $(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$. Báze má být maximální lineárně nezávislá posloupnost. Zde ale vidíme, že žádná maximální neexistuje.
- $\dim \mathbb{F}^{\leq n}[x] = n + 1$. V $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ máme $(n + 1)$ -člennou **kanonickou bázi** $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

4.10 Poznámka. Zde jsme pojem *báze* definovali pouze jako *konečnou* posloupnost vektorů. Pojem lineárně nezávislé posloupnosti můžeme rozšířit na nekonečné posloupnosti či dokonce nespočetné množiny prostě tak, že budeme požadovat, aby každá konečná podmnožina (podposloupnost) byla lineárně nezávislá. Takto můžeme zavést koncept báze (zvaná často *Hamelova báze*) i pro nekonečněrozměrné lineární prostory.

Například pro prostor všech polynomů snadno ukážeme, že je generován jednotlivými *monomy* $\mathbb{F}[x] = \text{span}\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ a že ona množina/posloupnost monomů je vskutku lineárně nezávislá. Můžeme ji tedy považovat za „bázi“¹⁶ tohoto prostoru.

Výše uvedený příklad je specifický tím, že je daná báze spočetná, tj. lze ji zapsat jako posloupnost. Naopak například prostory funkcí spočetnou bázi nemají. Dokonce, možná překvapivě, nemá spočetnou bázi ani prostor všech posloupností. Rozmyslete si, že $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \supsetneq \text{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}$, kde e_i je posloupnost, jejíž i -tý člen je 1 a jinak je konstantně nulová (zobecnění kanonické báze $\mathbb{R}^n$).¹⁷ Lze dokázat, že i tento lineární prostor má Hamelovu bázi, ale nikdo ji nikdy neviděl, a tak není příliš užitečná. (Platí, že každý lineární prostor má Hamelovu bázi, ale k důkazu je třeba axiom výběru.)

4.11 Věta (Výběr báze z generující posloupnosti). Buď L lineární prostor a necht G je konečná generující množina. Potom existují $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in G$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze.

¹⁶ V dalším textu se budeme držet našich definic tak, jak jsme je zformulovali. Báze pro nás tedy bude vždy konečná. Proto jsem to slovo dal do uvozovek. Je však potřeba upozornit, že doc. Velebil definuje i nekonečné báze, což by mohlo vést k nedorozuměním. Omlouvám se za nekonzistenci, ale věřím, že je to ku prospěchu si trochu definice zjednodušit, když se stejně nekonečněrozměrnými prostory nebudeme moc zabývat.

¹⁷ *Nápověda:* Například žádná konstantní nenulová posloupnost nelze takto nakombinovat.

Důkaz. Pakliže v G existuje vektor, jenž je lineární kombinací ostatních, můžeme ho z G odstranit a obdržíme novou generující množinu G' . To můžeme opakovat do té doby než v množině žádný vektor, jenž je lineární kombinací ostatních nezbude. To však znamená, že prvky takto vzniklé množiny tvoří lineárně nezávislou posloupnost. $\square$

4.12 Úloha. Najděte bázi lineárního prostoru $V = \text{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \leq \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímo z toho, jak jsme V zkonstruovali je jasné, že množina $G = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ generuje V . V rámci úlohy 3.5 jsme ukázali, že posloupnost $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ není lineárně nezávislá a netvoří tedy bázi V (ani $\mathbb{R}^3$). Věta výše nám říká, že je možné vybrat podposloupnost, která již bude bází V . Důkaz věty nám dává návod: Odstraň přebytečné vektory! Již v úloze 3.5 jsme si všimli, že $\vec{x}_3$ je lineární kombinací ostatních. Odstraníme-li jej, výsledná posloupnost $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ bude stále generovat V . Navíc vektory v posloupnosti nejsou jeden násobkem druhého, a tak je posloupnost lineárně nezávislá. Našli jsme tedy bázi V .

Tato báze tedy určuje souřadný systém ve V , který je pro nás důležitý, neboť standardní souřadnice z $\mathbb{R}^3$ (kanonickou bázi) zde nemůžeme použít. Dále by naším cílem mohlo být doplnit dvojici souřadných os o třetí, která by nám umožňovala popisovat body v celém $\mathbb{R}^3$. Výhodou takových souřadnic by bylo, že se lze snadno zúžit na podprostor V , lze na něj v jistém smyslu snadno promítat, lze hned poznat, jestli je zadaný bod uvnitř V či nikoliv. Takto doplnit posloupnost $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ na bázi $\mathbb{R}^3$ lze snadno: stačí dodat vektor, který není ve V . Funguje to obecně:

4.13 Věta (Doplňení lineárně nezávislé posloupnosti na bázi). Buď L lineární prostor dimenze $\dim L = n < \infty$ a necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost. Potom v L existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze.

Důkaz. Pakliže posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ není generující, znamená to, že najdeme vektor $\vec{x}_{k+1} \notin \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$ a podle věty 3.7 bude posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1})$ stále lineárně nezávislá. Takto můžeme pokračovat dokud nedostaneme posloupnost, která je zároveň generující. $\square$

4.14 Cvičení. Ačkoliv jsme to v důkazech vět výše přímo nezmínili, v obou případech se de facto jedná o matematickou indukci. Zkuste důkaz indukci sepsat formálně. Co je ta přirozená proměnná vzhledem ke které děláme indukci? Jaký je první krok? Jaká je indukční hypotéza? Jaký je indukční krok?

4.15 Důsledek. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L = n < \infty$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze L ,
2. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je lineárně nezávislá,
3. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ generuje L .

4.16 Věta. Necht L je lineární prostor konečné dimenze a V jeho lineární podprostor. Potom $\dim V \leq \dim L$ a rovnost nastává tehdy a jen tehdy když $V = L$.

Důkaz. Označme $n = \dim L$. Potom v L neexistuje větší než n -prvková lineárně nezávislá posloupnost. Tím pádem maximální lineárně nezávislá posloupnost ve V bude mít taky nejvýše n prvků. Pakliže má právě n prvků jedná se podle výše uvedeného důsledku o bázi L , a tedy máme rovnost $V = L$. $\square$

4.2 Souřadnice

Nyní nám již nic nebrání formulovat to, k čemu celou dobu směřujeme.

4.17 Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ dimenze $\dim L = n < \infty$ a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ jeho báze, $\vec{v} \in L$. Potom (jednoznačně určené) koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ lineární kombinace $\vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$ nazýváme **souřadnice** vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{X}$. Číslo α_i tedy nazýváme ***i*-tá souřadnice** a aritmetický vektor

$$[\vec{v}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

nazýváme **souřadnicový vektor**¹⁸ vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{X}$.

Připomínáme, že existenci a jednoznačnost vyjádření libovolného vektoru jako lineární kombinace báze jsme diskutovali hned na začátku této kapitoly.

4.18 Věta. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ jeho báze. Potom platí

1. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in L$ je $[\vec{x} + \vec{y}]_{\mathcal{X}} = [\vec{x}]_{\mathcal{X}} + [\vec{y}]_{\mathcal{X}}$.
2. Pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\vec{x} \in L$ je $[\alpha \vec{x}]_{\mathcal{X}} = \alpha [\vec{x}]_{\mathcal{X}}$.

Důkaz. Napišme

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \\ \vec{y} &= \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n \end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{x}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \vec{x}_n$$

Tedy

$$[\vec{x} + \vec{y}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [\vec{x}]_{\mathcal{X}} + [\vec{y}]_{\mathcal{X}}.$$

Mimochodem nějaký hnidopich by mohl mít problémy s důkazy, ve kterých se příliš často objevují tři tečky. Zkusme tedy vlastnost 2. dokázat *pořádně*. Jako cvičení si můžete přeformulovat důkaz prvního tvrzení.

¹⁸ Značení souřadnicových vektorů není ustálené. My budeme používat $[\vec{v}]_{\mathcal{X}}$, doc. Velebil píše $\text{coord}_{\mathcal{X}} \vec{v}$, takže váš cvičící bude používat buď jedno, nebo druhé, nebo něco úplně jiného.

Libovolný vektor $\vec{x} \in L$ lze zapsat jako lineární kombinaci $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom pro libovolné $\gamma \in \mathbb{F}$ platí $\gamma \vec{x} = \gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \gamma \alpha_i \vec{x}_i$. Máme tedy

$$[[\gamma \vec{x}]_{\mathcal{X}}]_i = \gamma \alpha_i = \gamma [[\vec{x}]_{\mathcal{X}}]_i,$$

kde $[\vec{v}]_i$ značí i -tý prvek aritmetického vektoru $\vec{v} \in \mathbb{F}^n$. Druhá rovnost vychází z definice operace sčítání v $\mathbb{F}^n$. $\square$

5 Součet a průnik podprostorů

Než se vrhneme na další velké téma, zakončíme povídání o podprostorech a jejich dimenzi úvahami nad tím, jak lze lineární podprostory skládat do větších a rozkládat na menší. Měřidlo velikosti lineárních (pod)prostorů jsme právě zavedli – je jím pojem dimenze. U obyčejných konečných množin jsme zvyklí jejich velikost charakterizovat počtem prvků. Vezmeme-li dvě disjunktní množiny, bude počet prvků ve sjednocení dán součtem počtu prvků jednotlivých množin. Pokud disjunktní nejsou, počítali bychom nějaké prvky dvakrát a proto náš vztah korigujeme následujícím způsobem

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

U podprostorů narazíme na potíž, že sjednocení dvou podprostorů typicky nebude podprostor. Vskutku: Vezmeme-li dvě různé přímky procházející počátkem, jejich sjednocení nebude ani přímka ani rovina, zkrátka žádný podprostor. Chceme-li analogii výše zmíněných úvah, mělo by spojením jednorozměrné přímky a jednorozměrné přímky vzniknout něco dvourozměrného. Nabízí se vzít tu jednoznačně určenou rovinu, ve které obě přímky leží – jejich společný lineární obal. Jiný úhel pohledu je ten, že místo abychom sjednocovali celé podprostory, sjednocujeme jejich generující množiny.

U průniku, jak uvidíme, je situace jednodušší, neboť průnik podprostorů se ukáže být rovněž podprostorem. Pozor však na to, abychom zde rovněž nepřejali myšlenku výše. Průnik generujících množin může být klidně prázdný a vůbec nemusí generovat průnik podprostorů. Podprostory jsou zkrátka komplikovanější než konečné množiny a úvahy u nich nelze redukovat na úvahy o generujících množinách.¹⁹

5.1 Připomenutí. Budte A, B dvě množiny. Jejich **průnik** a **sjednocení** vypadá následovně

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \end{aligned}$$

¹⁹ Banální úvahy o počtech prvků konečných množin mohou nalézt aplikace při studiu pravděpodobnosti, neboť klasická teorie pravděpodobnosti je postavená právě na množinách a na měření jejich relativní velikosti. Ukazuje se však, že mikrosvět klasickou teorií pravděpodobnosti a tím i naši celoživotně budovanou intuici neposlouchá a počítání pravděpodobnosti se místo toho řídí pravidly lineární algebry. Fakt, že jeden podprostor může mít dvě úplně odlišné báze, je matematickým pohledem na Heisenbergův princip neurčitosti.

5.2 Věta. Buď L lineární prostor, V, W jeho podprostory. Potom $V \cap W$ je rovněž lineární podprostor L .

Důkaz. Protože oba podprostory V a W určitě obsahují nulový vektor, je jejich průnik neprázdný.

Vezmeme-li dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V \cap W$, znamená to, že oba jsou v obou množinách V i W . Protože obě množiny jsou podprostory, jsou uzavřené na sčítání vektorů, takže $\vec{x} + \vec{y} \in V$ i $\vec{x} + \vec{y} \in W$. Tím pádem $\vec{x} + \vec{y} \in V \cap W$.

Uzavřenost na násobení skalárem se ukáže podobně. □

5.3 Definice. Buď L lineární prostor, $A, B \subseteq L$. Definujeme jejich **součet**

$$A + B = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in A, \vec{y} \in B\}.$$

5.4 Věta. Buď L lineární prostor, V, W jeho podprostory. Potom je i $V + W$ lineární podprostor L .

Důkaz. Protože jsou obě množiny V a W neprázdné, je jejich součet zjevně rovněž neprázdný.

Vezmeme nyní $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V + W$. Z definice součtu množin to znamená, že tyto prvky lze zapsat jako $\vec{x}_1 = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ a $\vec{x}_2 = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$, kde $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ a $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$. Potom ale $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{v}_1 + \vec{w}_1 + \vec{v}_2 + \vec{w}_2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + (\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$. Protože V je lineární podprostor, máme $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$ a obdobně i $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$. To nakonec znamená, že $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in V + W$.

Podobně můžeme ověřit uzavřenost na násobení. □

5.5 Cvičení. Dokažte, že $V + W$ je nejmenší lineární podprostor L obsahující V i W . Vzhledem ke cvičení 2.14 je to ekvivalentní pozorování $V + W = \text{span}(V \cup W)$.

Poznamenejme si to, co jsme již naznačovali v úvodu: součet lineárních podprostorů se dá vyjádřit sjednocením příslušných množin generátorů. Přesně tak byste součet zkonstruovali a popsali prakticky.

5.6 Tvzení. Buď L lineární prostor, $A, B \subseteq L$. Potom

$$\text{span } A + \text{span } B = \text{span}(A \cup B).$$

Důkaz. Zde není moc co dokazovat. Z definice $\text{span } A$ je množina prvků tvaru $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i$, kde $\vec{x}_i \in A$, a podobně $\text{span } B$ je množina prvků tvaru $\sum_{j=1}^l \beta_j \vec{y}_j$, kde $\vec{y}_j \in B$. Součet těchto množin bude tedy tvořen prvky tvaru $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{j=1}^l \beta_j \vec{y}_j$, což je přesně to, jak mají vypadat prvky $\text{span}(A \cup B)$ (až na zvolené pořadí generátorů, ale to vzhledem ke komutativitě sčítání nehraje roli). □

5.7 Cvičení. Buďte $V, W \leq L$, $V \cap W = \{\vec{0}\}$. Dokažte, že je-li $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V a $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze W , pak je $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ báze $V + W$.

My teď dokážeme něco trochu obecnějšího:

5.8 Věta (O dimenzi součtu a průniku podprostorů). Buď L lineární prostor, V, W jeho podprostory. Potom

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

Povšimněte si, že jsme záměrně člen $\dim(V \cap W)$ přesunuli doleva, abychom měli všude sčítání a nemuseli předpokládat, že všechny dimenze jsou konečné. (Kdybychom ve výrazu někde měli minus, vystavovali bychom se riziku počítání $\infty - \infty$, které je zapovězeno.) Spousta učebnic tak jako tak předpokládá, že jsou všechny dimenze konečné, aby si ušetřila práci s vysvětlováním, protože v nekonečněrozměrném případě tento vzorec stejně není příliš užitečný.

Důkaz. Je-li $\dim V = \infty$ nebo $\dim W = \infty$, pak snadno rozmyslíme, že $\dim(V + W) = \infty$ a rovnost platí (definujeme-li $\infty + n = \infty$ pro lib. $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$).

Předpokládejme tedy, že $\dim V = n < \infty$, $\dim W = m < \infty$, čímž $\dim(V \cap W) =: k$ musí podle věty 4.16 být rovněž konečná. Necht $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k)$ je báze $V \cap W$. Tu můžeme doplnit na bázi $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-k})$ prostoru V a stejně tak na bázi $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-k})$ prostoru W . Nyní tvrdíme, že $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-k}, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-k})$ je báze $V + W$ čímž bude důkaz hotov, neboť to bude znamenat, že $\dim(V + W) = k + (n - k) + (m - k) = n + m - k = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.

Že je množina generující plyne z tvrzení 5.6. Dokažme tedy, že je lineárně nezávislá. Vezměme tedy libovolnou lineární kombinaci prvků posloupnosti, která dává nulový vektor:

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{m-k} \beta_i \vec{y}_i = \vec{0}.$$

Označme

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \gamma_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \vec{x}_i = - \sum_{i=1}^{m-k} \beta_i \vec{y}_i.$$

Vidíme, že $\vec{v}$ musí být jak prvek V tak prvek W , je tedy v průniku a musí jít nakombinovat z báze $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k)$. Máme tedy $\vec{v} = \sum_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i \vec{z}_i = - \sum_{i=1}^{m-k} \beta_i \vec{y}_i$, kde druhá rovnost je z vyjádření výše. Znamená to však, že máme $\vec{0} = \sum_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^{m-k} \beta_i \vec{y}_i$. Z lineární nezávislosti báze $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{m-k})$ musejí být všechny koeficienty $\beta_1, \dots, \beta_{m-k}, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ nulové a speciálně tedy $\vec{v} = \vec{0}$. Podobným způsobem z lineární nezávislosti báze $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_k, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-k})$ dostaneme, že $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} = 0$. $\square$

5.9 Cvičení. Dvě roviny procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$ nemohou mít jako průnik pouze jeden bod. Dokažte toto intuitivní tvrzení pomocí věty o dimenzi součtu a průniku.

5.10 Příklad. Naopak v $\mathbb{R}^4$ to nastat může.²⁰ Uvažte třeba roviny $V = \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a $W = \text{span}\{\vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ je kanonická báze $\mathbb{R}^4$. Ověřte, že $V \cap W = \{\vec{0}\}$ a $V + W = \mathbb{R}^4$. Ověřte, že totéž platí nejen pro kanonickou, ale pro jakoukoliv bázi.

²⁰ Může dokonce existovat dvojice mimoběžných rovin. My však obecné roviny zatím neumíme popisovat a ani jsme takový pojem vlastně formálně nedefinovali. Zatím jsme se bavili pouze o lineární podprostorech, a ty vždy procházejí počátkem.

5.11 Úloha. Uvažujme $V = \text{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, $W = \text{span}\{\vec{x}_3, \vec{x}_4\}$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Najděte průnik a součet těchto podprostorů.

Řešení. Najít součet je svým způsobem jednoduché: stačí sjednotit množiny generátorů. Máme tedy $V + W = \text{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$.

Nyní však není tak úplně jasné, jak součet opravdu *vypadá*. Je generován čtyřmi vektory, takže by to mohlo být celé $\mathbb{R}^4$, ale také se může stát, že vektory jsou lineárně závislé a součtem je tedy nějaký vlastní podprostor $\mathbb{R}^4$. Zkusme tedy najít bázi a dimenzi součtu.

Od pohledu můžeme vidět, že druhý generátor není násobkem prvního, protože první má ve třetí složce nulu, zatímco druhý je nenulový. Podobně třetí generátor není lineární kombinací prvních dvou, protože má nenulovou poslední složku, zatímco první dva ji mají nulovou. Naopak si můžeme všimnout, že poslední generátor je lineární kombinací předchozích: $\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$.

Z generující množiny pro $V + W$ jsme tedy vybrali bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a tím jsme určili dimenzi $\dim(V + W) = 3$.

Kdyby nám vyšlo, že součet je celé $\mathbb{R}^4$, máme počítání průniku bez práce. Proč?²¹ Počítejme tedy. Libovolný vektor z V musí jít zapsat jako $\vec{v} = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$. Je-li zároveň z W , musí rovněž jít zapsat jako $\gamma\vec{x}_3 + \delta\vec{x}_4$. Dohromady tedy řešíme soustavu

$$\begin{array}{rcll} 1\alpha + 0\beta = 1\gamma + 0\delta & & \alpha = \gamma \\ 1\alpha + 0\beta = 0\gamma + 1\delta & & \alpha = \delta \\ 0\alpha + 1\beta = 0\gamma + 1\delta & \text{tedy} & \beta = \delta \\ 0\alpha + 0\beta = 1\gamma - 1\delta & & 0 = \gamma - \delta \end{array}$$

Za δ si můžeme zvolit libovolný parametr $\delta = t$ a dopočítáme $\alpha = \beta = \gamma = t$. Vektor z průniku tedy vyjádříme jako

$$\vec{v} = t\vec{x}_1 + t\vec{x}_2 = t\vec{x}_3 + t\vec{x}_4 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To znamená

$$V_1 \cap V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

²¹ Protože by průnik měl podle naší věty dimenzi nula a byla by to tedy jednobodová množina obsahující nulový vektor. Líný avšak přemýšlivý počtář se může zamyslet nad tím, jestli bychom to přece jenom nemohli nějak bezpracně vyřídit i v tomto případě, když nějak šikovně využijeme pozorování $\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3$.

5.12 Poznámka. Situace, kdy $L = V + W$ přičemž $V \cap W = \{\vec{0}\}$ je speciálně zajímavá. Říkáme pak, že součet je *direktní* a značíme $L = V \oplus W$. Zapišeme-li lineární prostor jako direktní součet, znamená to, že jsme ho jaksi rozložili na dvě menší (jednodušší) části. V důsledku každý vektor $\vec{x} \in L$ lze *jednoznačně* napsat jako součet $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$, kde $\vec{v} \in V$ a $\vec{w} \in W$. Onen jednoznačně určený vektor $\vec{v}$ se pak nazývá *průmět vektoru $\vec{x}$ do podprostoru V podle podprostoru W* . Pozor, nemusí se jednat o kolmý průmět. Promítáme *podle W* , což znamená, že ten směr promítání je rovnoběžný s W (je totiž daný vektorem $\vec{w}$). Na tomto předmětu nebudeme mít prostor tuto konstrukci dále rozebírat, soustředíme se později pouze na *kolmý průmět*. Na to však musíme nejprve definovat, co to znamená ta *kolmost*, což nám ještě chvíli potrvá.

5.13 Poznámka. Definice průniku a součtu lineárních podprostorů je velmi přirozená a podobnou myšlenku můžete najít u řady dalších pojmů, kde existuje nějaké uspořádání. Buď L lineární prostor. Rozmyslete si, že na množině všech podprostorů $\mathcal{V} = \{V \mid V \leq L\}$ relace $\leq$ být podprostorem definuje *částečné uspořádání*. Co to znamená? Být podprostorem je reflexivní: pro každé V máme $V \leq V$; je to antisymetrické: je-li $V \leq W$ a $W \leq V$, musí být $V = W$; a je to tranzitivní: je-li $V_1 \leq V_2$ a $V_2 \leq V_3$, pak $V_1 \leq V_3$. Na rozdíl od *úplného uspořádání* (jako máme třeba na reálných číslech) nemusí být možné porovnat každou dvojici: můžete najít podprostory $V, W \leq L$ takové, že neplatí ani $V \leq W$ ani $W \leq V$. Ve skutečnosti není moc co ověřovat, pokud víme, že tyto vlastnosti splňuje relace $\subseteq$ být podmnožinou, neboť *být podprostorem* je totéž co *být podmnožinou* akorát zúžené na podprostory.

Máme-li nějakou množinu vybavenou částečným uspořádáním $(\mathcal{M}, \leq)$, je přirozené se ptát, zda pro libovolnou dvojici prvků $a, b \in \mathcal{M}$ můžeme najít *nejmenší horní závorku* (supremum), tj. nejmenší prvek c takový, který je větší než obě a, b a zároveň menší než každé další c' s touto vlastností. Tomu pak budeme říkat *spojení* a značit $c = a \vee b$. Obdobně můžeme definovat *průsek* $d = a \wedge b$ jako největší dolní závorku (infimum). Pokud takové prvky jde vždy najít, uspořádání se nazývá *svazové*. U množin a relace $\subseteq$ je spojením a průsekem sjednocení a průnik. U lineárních podprostorů je to ovšem součet a průnik. Když jste na střední škole zkoumali *nejmenší společný násobek* a *největší společný dělitel*, opět jste dělali totéž, akorát s relací *být dělitelem*.

6 Lineární zobrazení

6.1 Úvod

6.1 Definice. Buďte V, W lineární prostory nad stejným tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $A: V \rightarrow W$ nazveme **lineární**,²² jestliže platí

1. pro každou dvojici $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$,

²² Myšlenka zkoumat zobrazení, které zachovávají strukturu lineárního prostoru je velmi přirozená a je jedním ze základních kamenů abstraktní algebry. Takovému zobrazení, které zachovává nějakou algebraickou strukturu říkáme *homomorfismus*. Lineární zobrazení je tedy homomorfismus lineárních prostorů.

2. pro každý $\vec{x} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{F}$ je $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$.

Množinu všech lineárních zobrazení $V \rightarrow W$ budeme značit $\text{Lin}(V, W)$. V případě, že jsou oba prostory totožné, budeme značit $\text{Lin}(V) := \text{Lin}(V, V)$ a příslušná lineární zobrazení budeme nazývat **lineární operátory na V** .

6.2 Značení. Lineární zobrazení budeme značit velkými písmeny. Jedná se o relativně běžnou konvenci, ačkoliv někteří autoři používají malá písmena stejně jako u funkcí. Důvod pro naši volbu je ten, že lineárním prostorem V klidně může být prostor polynomů či prostor funkcí. Značit funkce písmeny $f, g, h, \dots$ a zobrazení působící na funkce týmiž písmeny by mohlo být poněkud matoucí.

Kromě toho budeme používat ještě jednu běžnou konvenci a sice že při působení zobrazení na vektor budeme vynechávat závorky a psát $A\vec{x}$ namísto $A(\vec{x})$. Je to jako bychom vektor $\vec{x}$ násobili jakýmsi A . Zobrazení lze pochopitelně skládat, a tak na vektor Ax může zapůsobit zase jiné lineární zobrazení B a výsledek bude označen jako $BA\vec{x}$. Nabízí se tedy složené zobrazení²³ $B \circ A$ značit prostě BA jako bychom zobrazení násobili.

Rozmyslete si, že skládání zobrazení je vždy asociativní. Při skládání více než dvou zobrazení tedy nemusíme psát závorky. Rovněž z definice platí, že $(BA)\vec{x} = B(A\vec{x})$, čili ani v tomto případě závorky nepíšeme.

6.3 Poznámky.

- Lineární zobrazení musí zobrazovat nulový vektor na nulový vektor. Vskutku: $A\vec{0} = A(0 \cdot \vec{0}) = 0A(\vec{0}) = \vec{0}$. (Poznamenejme, že jak nulový vektor ve V , tak nulový vektor ve W značíme stejným symbolem $\vec{0}$ ačkoliv se může jednat o různé objekty.)
- Dvě podmínky pro linearitu lze zapsat do jedné: Zobrazení A je lineární právě tehdy, když $A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{F}$. (Dokažte sami.)
- Linearita znamená respektování libovolných lineárních kombinací. Zobrazení je lineární právě tehdy, když

$$A(\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n) = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \dots + \alpha_n A\vec{x}_n.$$

Tento fakt je rovněž známý jako *princip superpozice*. Dokažte matematickou indukci!

6.4 Příklady. Ověřte, že následující zobrazení jsou lineární.

- **Nulové zobrazení** $O: V \rightarrow W$ zobrazující $O\vec{x} = \vec{0}$ pro každé $\vec{x} \in V$ je lineární.
- **Identické zobrazení** $\text{id}_V: V \rightarrow W$ zobrazující $\text{id}_V \vec{x} = \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in V$ je lineární.
- Lineární funkce tak, jak se běžně definuje v matematické analýze, tedy funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $f(x) = kx + q$ pro nějaké $k, q \in \mathbb{R}$, *nemusí* být s pohledu lineární algebry lineární. Je lineární tehdy a jen tehdy, když $q = 0$.
- Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární tehdy a jen tehdy když se jedná o přímou úměru $f(x) = kx$.

²³ Brzy ukážeme, že takové zobrazení bude opět lineární

- Zobrazení $A: V \rightarrow V$ dané předpisem $A\vec{x} = k\vec{x}$ pro nějaké $k \in \mathbb{F}$ je lineární. Jedná se o *stejnolehlost*²⁴ se středem v počátku souřadnic. Pro $k = -1$ se jedná o středovou souměrnost.²⁵ Pro $k > 0$ se v podstatě jedná o k -násobné zvětšení.

6.5 Příklady. Věřte, ne nutně ověřte, že následující třídy zobrazení jsou lineární. Abychom tato tvrzení skutečně mohli ověřit, museli bychom ty třídy nejprve řádně definovat, to v tento moment dělat nebudeme. Zkuste však linearitu ověřit vždy na konkrétním příkladě.

- Rotace v $\mathbb{R}^n$ se středem v počátku souřadnic jsou lineární. Rozmyslete si například, že rotaci o 90° v $\mathbb{R}^2$ lze zapsat jako

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že jde o lineární zobrazení.

- Zobrazení v osově souměrnosti podle osy procházející počátkem je lineární. Rozmyslete si například, že převrácení podle osy x v $\mathbb{R}^2$ lze zapsat jako

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že jde o lineární zobrazení.

- Obecně nejen osová souměrnost, ale zrcadlení podle libovolného lineárního podprostoru je lineární zobrazení (viz např. středová souměrnost podle počátku). Skládáním rotací a zrcadlení dostaneme opět rotaci či zrcadlení. Na střední škole jste takovým zobrazením říkali *shodné*. Taková zobrazení budou lineární, pokud budou navíc zachovávat počátek souřadnic. Potom jim budeme říkat *ortogonální transformace*, přesná definice přijde později.
- Roztažení v jednom směru je lineární zobrazení (zachovává-li počátek). Ověřte například, že následující zobrazení je lineární pro libovolné $k \in \mathbb{R}$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}.$$

- Zkosení je lineární zobrazení (zachovává-li počátek). Ověřte například, že následující zobrazení je lineární

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

- Průmět do lineárního podprostoru je lineární zobrazení. Rozmyslete si například, že kolmý průmět do osy x v $\mathbb{R}^2$ lze zapsat jako

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že jde o lineární zobrazení.

²⁴ Vzpomínáte na to slovo z geometrie na střední škole? Abyste se cítili jako vysokoškoláci, můžete místo toho odteď říkat *homotetie*.

²⁵ Středová souměrnost (ani stejnolehlost) podle jakéhokoliv jiného bodu než počátku souřadnic lineární není. Proč?

- Na matematické analýze se dozvíte, že *derivace* je lineární zobrazení.²⁶ Ať už jste s pojmem derivace obeznámeni či nikoliv, ověřte přímo, že je následující zobrazení $D: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ lineární:

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1},$$

$$\text{tj. } D(\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i) = \sum_{i=1}^n i\alpha_i x^{i-1}.$$

- Stejně tak je lineárním zobrazením určitý i neurčitý integrál.²⁷ Abychom se nemuseli ohlížet na technické detaily, soustředme se opět na polynomy. Dokažte, že zobrazení $S: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ je lineární, kde

$$S(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = \alpha_0 x + \frac{1}{2}\alpha_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\alpha_n x^{n+1},$$

$$\text{tj. } S(\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \alpha_i x^{i+1}.$$

6.6 Tvrzení (Lineární kombinace závisí lineárně na koeficientech). Buď W lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$. Pak je zobrazení $A: \mathbb{F}^n \rightarrow V$ dané vztahem

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n$$

lineární.

Důkaz. Vezměme dva aritmetické vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}^n$ a označme jejich složky x_i resp. y_i . Vezměme ještě $\gamma \in \mathbb{F}$ a počítejme

$$\begin{aligned} A(\gamma \vec{x} + \vec{y}) &= A \begin{pmatrix} \gamma x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \gamma x_n + y_n \end{pmatrix} = (\gamma x_1 + y_1) \vec{a}_1 + \cdots + (\gamma x_n + y_n) \vec{a}_n \\ &= \gamma(x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n) + (y_1 \vec{a}_1 + \cdots + y_n \vec{a}_n) = \gamma A\vec{x} + A\vec{y}. \quad \square \end{aligned}$$

Nyní bychom chtěli lineární zobrazení nějak šikovně popsat. Vzpomeňme, že lineární zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je určené *jediným* číslem k . Jak to bude fungovat pro zobrazení $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$? Vezměme libovolný vektor $\vec{v}$ a označme v_i jeho složky. Můžeme pak napsat $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + \cdots + v_n \vec{e}_n$. Podle principu superpozice

$$A\vec{v} = v_1 A\vec{e}_1 + \cdots + v_n A\vec{e}_n.$$

To ale znamená, že na výpočet $\vec{v}$ není třeba vědět, jak A působí na obecný vektor, ale stačí znát obrazy $A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n \in \mathbb{R}^m$. Co kdybychom si tyto obrazy zapsali do tabulky? Takovým tabulkám čísel říkáme matice. Zde tedy dostaneme matici, jejíž sloupce budou tvořené obrazy bazických vektorů

$$\mathbf{A} = (A\vec{e}_1 \quad \cdots \quad A\vec{e}_n).$$

²⁶ Nikoliv však na prostoru všech funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, protože ne každá funkce je diferencovatelná.

²⁷ U neurčitého integrálu bychom měli nějak ošetřit tu nepříjemnost, že primitivní funkce k zadané je určena až na konstantu

6.7 Příklad. Lineární zobrazení *otočení o 90°* zobrazuje

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

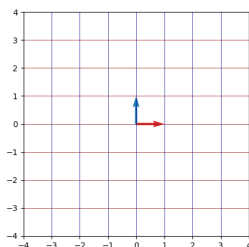
Jeho matice je tedy tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Působení na obecný vektor tedy lze spočítat jako

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 0 + y \cdot (-1) \\ x \cdot 1 + y \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

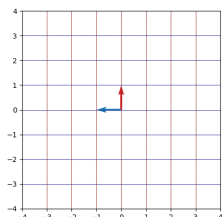
Toto pozorování nám rovněž dává návod jak si libovolné lineární zobrazení vizualizovat. Říká totiž, že čtvercová síť určená vektory kanonické báze



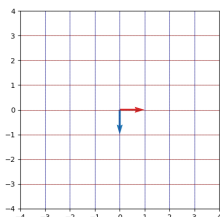
se promění opět v jakousi pravidelnou rovnoběžníkovou síť, která bude určena obrazy vektorů kanonické báze. Projdeme si opět příklady zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ z příkladu 6.5, určíme příslušné matice a nakresleme ztransformovanou síť:

6.8 Příklady.

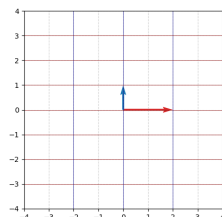
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

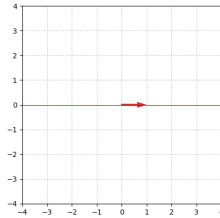
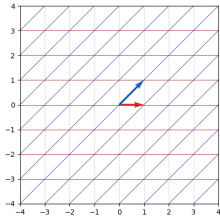


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Z tvrzení 6.6 plyne, že to funguje i obráceně: Vyplní-li matici $r \times s$ libovolnými čísly z $\mathbb{F}$, bude mi udávat lineární zobrazení $\mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$.

Zjistili jsme tedy následující:

- Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi maticemi $m \times n$ a lineárními zobrazeními $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$
- Akce příslušného lineárního zobrazení na vektor lze popsat pomocí tzv. *maticového násobení*, kde se čísla z vektoru kombinují sloupcečky matice:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \cdots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}x_1 + \cdots + \mathbf{A}_{1n}x_n \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{m1}x_1 + \cdots + \mathbf{A}_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Tedy } [\mathbf{A}\vec{x}]_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}x_j.$$

Na závěr si ještě povšimněme, že zapůsobíme-li na vektor $\mathbf{A}\vec{x}$ novou maticí²⁸ $\mathbf{B}$, pak výsledek bude mít složky

$$[\mathbf{B}(\mathbf{A}\vec{x})]_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ki} \mathbf{A}_{ij} x_j$$

jako bychom vektor $\vec{x}$ násobili maticí $\mathbf{C}$ se složkami $\mathbf{C}_{kj} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_{ki} \mathbf{A}_{ij}$. Jinými slovy vidíme, že skládáme-li dvě lineární zobrazení, výsledek je opět lineární a jeho matice je určena výše uvedeným pravidlem pro *maticové násobení*.

Nyní tyto poznatky budeme chtít převést do formálních definic a vět přičemž již víme, že prostory aritmetických vektorů můžeme nahradit libovolnými konečně-rozměrnými prostory.

²⁸ Jaké musí mít matice rozměry, aby to vůbec šlo?

6.2 Skládání lineárních zobrazení a maticové násobení

6.9 Definice. Buďte $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{l \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ matice. Definujeme jejich **součin** $\mathbf{AB} \in \mathbb{F}^{l \times n}$ pravidlem

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj} \quad \text{pro libovolné } i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, n.$$

Přitom na aritmetické vektory můžeme hledět jako na matice s jedním sloupcem. Pro libovolné $\vec{x} \in \mathbb{F}^m$ tedy máme

$$[\mathbf{A}\vec{x}]_i = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_{ik} x_k. \quad \text{pro libovolné } i = 1, \dots, l$$

6.10 Cvičení. Ověřte, že je maticové násobení asociativní. Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vhodných rozměrů máme $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Proto při skládání více matic nemusíme upřesňovat pořadí operací pomocí závorek.²⁹

6.11 Definice. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báze W . Potom pro libovolné lineární $A: V \rightarrow W$ definujeme **matici zobrazení** A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ skrze její sloupcečky

$$[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = ([A\vec{x}_1]_{\mathcal{Y}} \quad [A\vec{x}_2]_{\mathcal{Y}} \quad \dots \quad [A\vec{x}_n]_{\mathcal{Y}}) \in \mathbb{F}^{m \times n}.$$

Pokud $V = W$ a $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, budeme matici zobrazení značit jednoduše $[A]_{\mathcal{X}}$.

6.12 Úloha. Uvažujme lineární zobrazení $D: \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ působící na nejvýše kvadratické polynomy jako derivace

$$D(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = \beta + 2\gamma x.$$

Najděte matici tohoto operátoru v kanonické bázi $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$

Řešení. Nejprve je nutné najít obrazy vektorů kanonické báze a pak určit jejich souřadnice v kanonické bázi:

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 = 0 + 0x + 0x^2 \\ D(x) &= 1 = 1 + 0x + 0x^2 \\ D(x^2) &= 2x = 0 + 2x + 0x^2 \end{aligned}$$

Matice tedy bude tvaru

$$[D]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

²⁹ Tvzení vlastně plyne z asociativity skládání zobrazení, zkuste ji však dokázat přímo z definujícího vzorce.

6.13 Věta. Budte V a W lineární prostory konečné dimenze. Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báze W . Necht $A: V \rightarrow W$ je lineární a $\vec{v} \in V$. Potom $[A\vec{v}]_{\mathcal{Y}} = [A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}[\vec{v}]_{\mathcal{X}}$.

Důkaz. Napišme $\vec{v} = \sum v_i \vec{x}_i$. Potom $A\vec{v} = \sum_j v_j A\vec{x}_j$. Přitom $[A\vec{x}_j]_{\mathcal{Y}}$ je j -tý sloupec matice $[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$. Nyní

$$[[A\vec{v}]_{\mathcal{Y}}]_i = \sum_j v_j [[A\vec{x}_j]_{\mathcal{Y}}]_i = \sum_j v_j [[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}]_{ij}. \quad \square$$

6.14 Příklad. Uvažujme lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ působící jako

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Určeme jeho matici v kanonické bázi $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad [A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní ověrmе, že výše uvedená věta opravdu funguje. Vezměme obecný vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{tím pádem rovněž} \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pak by mělo fungovat následující

$$[A\vec{v}]_{\mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{E}}[\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Opravdu jsme dostali definiční vzorec, se kterým jsme začali. Tím jsme zároveň ověřili, že zadané zobrazení bylo opravdu lineární. Jinak by tento postup totiž fungovat nemohl, neboť maticové násobení působí na vektory lineárně.

6.15 Věta. Budte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V a necht $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in W$. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $A: V \rightarrow W$ takové, že $A\vec{x}_i = \vec{w}_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Každý prvek $\vec{v} \in V$ lze jednoznačně napsat jako $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{x}_i$. Zobrazení A tedy definuji takto: $A\vec{v} = \sum_i v_i A\vec{x}_i$. Že je dané zobrazení lineární snadno plyne z věty 4.18. $\square$

6.16 Důsledek. Budte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze. Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báze W . Pak konstrukce matice zobrazení v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ popisuje vzájemně jednoznačný vztah mezi lineárními zobrazeními $A: V \rightarrow W$ a maticemi $\mathbb{F}^{m \times n}$.

6.17 Příklad. Zkonstruujeme lineární zobrazení $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které každý vektor otočí o úhel α (vzhledem k počátku). Podle výše uvedené věty stačí specifikovat, jak dané zobrazení působí na vektory (kanonické) báze a tím je lineární zobrazení již jednoznačně určeno. Snadno rozmyslíme, že rotace o úhel α musí zobrazovat

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Jinými slovy zobrazení R_α je již jednoznačně určeno svojí maticí

$$[R_\alpha]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit explicitně jak zobrazení R_α působí na obecný vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, stačí použít maticové násobení:

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [R_\alpha]_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

6.18 Věta. Budte U, V, W lineární prostory nad $\mathbb{F}$ a $A: V \rightarrow W, B: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Potom je složené zobrazení $AB: U \rightarrow W$ rovněž lineární.

Důkaz. Vezměme $\vec{x}, \vec{y} \in U$ a $\alpha \in \mathbb{F}$. Potom

$$(AB)(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = A(B(\alpha\vec{x} + \vec{y})) = A(\alpha B\vec{x} + B\vec{y}) = \alpha AB\vec{x} + AB\vec{y}. \quad \square$$

6.19 Věta. Budte U, V, W lineární prostory nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ báze těchto prostorů a $A: V \rightarrow W, B: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Potom

$$[AB]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}} = [A]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}} [B]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Pro matici $\mathbf{X}$ budeme značit symbolem $[\mathbf{X}]_{\bullet, i}$ její i -tý sloupeček. Podívejme se teď na i -tý sloupeček matice složeného operátoru AB :

$$\begin{aligned} [[AB]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}}]_{\bullet, i} &= [AB\vec{x}_i]_{\mathcal{Z}} = [A]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}} [B\vec{x}_i]_{\mathcal{Y}} = \\ &= [A]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}} [[B]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}]_{\bullet, i} = [[A]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}} [B]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}]_{\bullet, i} \end{aligned}$$

V poslední rovnosti jsme využili toho, že pro maticové násobení platí $[\mathbf{AB}]_{\bullet, i} = \mathbf{AB}_{\bullet, i}$. $\square$

6.20 Poznámka. Skládání zobrazení je asociativní operace: Pro libovolná $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ platí $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Snadno ověříme z definice:

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Důsledkem výše uvedené věty je, že i maticové násobení je asociativní. Platí tedy $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ pro libovolnou trojici matic vhodných rozměrů. Jako cvičení zkuste asociativitu dokázat přímo z definice maticového násobení.

6.21 Příklad. Vzpomeňme na lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ působící jako

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \quad \text{s maticí} \quad [A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Náčrtkem si můžeme rozmyslet, že toto zobrazení vypadá jako otočení o 45° spolu se zvětšením $\sqrt{2}$ -krát. Ověřme nyní, že opravdu jde o složení těchto dvou zobrazení.

Matici rotace již známe, dosadíme jen příslušný úhel:

$$[R_\alpha]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad [R_{45^\circ}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Zvětšení k -krát, přesněji stejnoolehlost se středem v počátku a koeficientem k , je lineární zobrazení $S_k: \vec{x} \mapsto k\vec{x}$. Zde působí na lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$, a tak rovněž snadno najdeme jeho matici

$$[S_k]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad [S_{\sqrt{2}}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní již snadno ověříme, že vskutku platí $A = R_{45^\circ} S_{\sqrt{2}} = S_{\sqrt{2}} R_{45^\circ}$ pomocí maticového násobení:

$$[R_{45^\circ} S_{\sqrt{2}}]_{\mathcal{E}} = [R_{45^\circ}]_{\mathcal{E}} [S_{\sqrt{2}}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [A]_{\mathcal{E}}.$$

6.22 Poznámka. Operace skládání zobrazení má neutrální prvek a sice identické zobrazení. Zjevně totiž pro každé zobrazení $f: A \rightarrow B$ musí platit $f \circ \text{id}_A = f = \text{id}_B \circ f$. Analogií ve světě matic je matice $[\text{id}]_{\mathcal{E}} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n)$ jenž si proto vysloužila speciální označení:

6.23 Definice. Matici

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad \text{tj.} \quad [\mathbf{E}_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i = j, \\ 0 & \text{jestliže } i \neq j, \end{cases}$$

nazýváme **jednotkovou matici** (rozměrů $n \times n$).

Matici $\mathbf{O}_{m,n} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ jejíž všechny prvky jsou nulové (a představuje tedy nulový vektor v lineárním prostoru $\mathbb{F}^{m \times n}$) nazýváme **nulovou matici**.

6.24 Poznámka. V matematice a fyzice se často používá symbol **Kroneckerovo delta** definovaný podmínkou

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } i = j, \\ 0 & \text{jestliže } i \neq j. \end{cases}$$

Jedná se pouze o symbol, nikoliv o matici nějakých konkrétních rozměrů. Písmenka i a j mohou zastupovat prakticky cokoliv, většinou však nějaký index. Pomocí tohoto symbolu můžeme definovat jednotkovou matici snadno vyjádřením jejích prvků jako $[\mathbf{E}_n]_{ij} = \delta_{ij}$ pro $i, j = 1, \dots, n$.

6.3 Transformace souřadnic

Jako přímou aplikaci pojmu matice zobrazení v bázi – ne nutně kanonické – uvedme problém transformace souřadnic. Hledáme-li souřadnice vektoru $\vec{v} \in \mathbb{F}^n$ v nějaké nekanonické bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ víme, že tento problém povede na soustavu lineárních rovnic. Tu umíme vyřešit, ale je to poněkud pracné. Pokud bychom takto hledali souřadnice spousty vektorů, budeme stále pracně řešit pořád prakticky totožnou soustavu, takže bychom se mohli zajímat o to, zda si zde nejde ušetřit práci. Vzpomeneme si na to, že zobrazení přiřazující vektoru jeho souřadnice je lineární, a tak by mělo mít nějakou matici, se kterou bude počítání souřadnic hračka. Otázka, jak tuto matici zkonstruovat je překvapivě jednoduchá.

6.25 Příklad. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ kromě kanonické báze $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ rovněž další bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chtěli bychom pro zadaný vektor $\vec{v} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ najít jeho souřadnice v bázi $\mathcal{X}$. Začneme triviálním pozorováním, že $\vec{v} = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \vec{v}$. To ale znamená, že

$$[\vec{v}]_{\mathcal{X}} = [\text{id} \vec{v}]_{\mathcal{X}} = [\text{id}]_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}} [\vec{v}]_{\mathcal{E}}.$$

Hledaná matice zprostředkovávající změnu souřadnic je prostě matice identického zobrazení v příslušných bázích. Zkusme ji najít. Její sloupcečky jsou vektory kanonické báze vyjádřené v bázi $\mathcal{X}$. Snadno se přesvědčíme, že

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \quad \text{tj.} \quad [\vec{e}_1]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2), \quad \text{tj.} \quad [\vec{e}_2]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hledaná matice tedy je

$$[\text{id}]_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Pro libovolný vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tak můžeme snadno najít jeho souřadnice v bázi $\mathcal{X}$ jako

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}} \quad [\vec{v}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2v_1 + 1/2v_2 \\ -1/2v_1 + 1/2v_2 \end{pmatrix}.$$

Ono to není vlastně nic až tak revolučního neboť stejný výsledek bychom dostali dosazením vyjádření vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ do $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$.

Nakonec ještě poznamenejme, že vyjádřit matici pro opačnou transformaci je daleko jednodušší. Matice $[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}}$ totiž musí mít ve sloupcečkách vektory báze $\mathcal{X}$ vyjádřené v kanonické bázi, tj. prostě ty samotné vektory.

6.26 Definice. Buď V lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ konečné dimenze a necht $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou jeho báze. Matici $[\text{id}_V]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$ nazýváme **matice přechodu** nebo také **matice transformace souřadnic** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.

6.27 Pozorování. S předpoklady předchozí definice platí $[\vec{v}]_{\mathcal{Y}} = [\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}[\vec{v}]_{\mathcal{X}}$ pro každé $\vec{v} \in V$.

6.4 Lineární prostor lineárních zobrazení

Úplně na závěr této kapitoly zmíníme jak lze definovat strukturu lineárního prostoru na množině $\text{Lin}(V, W)$. Hned od první kapitoly totiž víme, že matice lze sčítat a násobit skalárem – tvoří tedy lineární prostor. Přirozená otázka je, čemu tyto operace sčítání a násobení skalárem odpovídají v řeči zobrazení.

6.28 Definice. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$.

1. Pro zobrazení $A, B: V \rightarrow W$ definuji jejich **součet** $(A + B): V \rightarrow W$ vztahem $(A + B)(\vec{x}) = A\vec{x} + B\vec{x}$.
2. Pro zobrazení $A: V \rightarrow W$ a skalár $\alpha \in \mathbb{F}$ definuji **skalární násobek** $(\alpha A): V \rightarrow W$ jako $(\alpha A)(\vec{x}) = \alpha A\vec{x}$.

6.29 Věta. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$.

1. Součet dvou lineárních zobrazení $V \rightarrow W$ je lineární.
2. Skalární násobek lineárního zobrazení $V \rightarrow W$ je lineární.

Důkaz. Vezměme $A, B \in \text{Lin}(V, W)$. Chceme ukázat, že $A + B$ je rovněž lineární. Vezměme tedy $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{F}$. Potom

$$\begin{aligned} (A + B)(\alpha\vec{x} + \vec{y}) &= A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) + B(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y} + \alpha B\vec{x} + B\vec{y} = \\ &= \alpha(A\vec{x} + B\vec{x}) + A\vec{y} + B\vec{y} = \alpha(A + B)\vec{x} + (A + B)\vec{y}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. Podobně můžeme postupovat u druhého tvrzení. $\square$

6.30 Věta. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Potom je množina lineárních zobrazení $\text{Lin}(V, W)$ vybavená výše definovanými operacemi lineární prostor nad $\mathbb{F}$.

Důkaz si zkuste rozmyslet sami. Rozmyslete si speciálně jakou roli tu hrají či nehrají nulové zobrazení či identické zobrazení. Jak bude působit zobrazení opačné k zadanému?

Nyní ověříme, že definované operace opravdu odpovídají sčítání a násobení matic.

6.31 Věta. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze, $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jejich báze. Potom

1. pro každé $A, B \in \text{Lin}(V, W)$ je $[A + B]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = [A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} + [B]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$,
2. pro každé $A \in \text{Lin}(V, W)$ a $\alpha \in \mathbb{F}$ je $[\alpha A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = \alpha[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$.

Důkaz. Cvičení. $\square$

6.32 Věta. Operace sčítání a skládání operátorů jsou distributivní. Platí tedy

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(C + D) = AC + AD$$

pro libovolné $A, B \in \text{Lin}(V, W)$, $C, D \in \text{Lin}(U, V)$.

Obdobně je i sčítání a násobení matic distributivní. Platí tedy

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{AC} + \mathbf{AD}$$

pro libovolnou čtveřici matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ vhodných rozměrů.

Důkaz. První distributivní zákon je prostým důsledkem definice sčítání operátorů

$$(A + B)C\vec{x} = AC\vec{x} + BC\vec{x} = (AC + BC)\vec{x}.$$

Druhý distributivní zákon využívá navíc linearitu zobrazení

$$A(C + D)\vec{x} = A(C\vec{x} + D\vec{x}) = AC\vec{x} + AD\vec{x} = (AC + AD)\vec{x}.$$

Ze zákonů pro zobrazení již plynou odpovídající vztahy pro matice. Jako cvičení dokažte přímo z definice maticového násobení. $\square$

6.33 Věta. Operace skalárního násobení je kompatibilní se skládáním zobrazení v následujícím smyslu:

$$(tA)B = t(AB) = A(tB)$$

pro libovolné t z tělesa a vhodné lineární operátory A a B . Analogické tvrzení platí pro matice. $\square$

Důkaz. Cvičení.

6.34 Příklad. Vzpomeňme na příklad 6.21, kde jsme se snažili ukázat, že lineární zobrazení

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \quad \text{s maticí} \quad [A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vznikne složením rotace o 45° a stejnolehlosti (zvětšení) s koeficientem $k = \sqrt{2}$. Výpočty jako tento se dají zjednodušit a zlidštit vytýkáním různých konstant z matic, tj. využíváním lineární struktury na množině lineárních zobrazení. Matice rotace o 45° se dá zapsat jako

$$[R_{45^\circ}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} [A]_{\mathcal{E}}.$$

Máme tedy $A = \sqrt{2} R_{45^\circ}$ a vztah daných dvou zobrazení nám již začíná být jasnější. Nyní si ještě uvědomme, že stejnolehlost s koeficientem k lze zapsat prostě jako $S_k = k \text{id}$. Vskutku tedy platí $R_{45^\circ} \circ S_{\sqrt{2}} = (\frac{\sqrt{2}}{2} A)(\sqrt{2} \text{id}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2})(A \text{id}) = A$. Maticově:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Obraz a vzor při lineárním zobrazení

7.1 Motivace. Uvažujme obecnou matici a vektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Hledáme-li vzor vektoru $\vec{b}$ při zobrazení daném maticí $\mathbf{A}$, tj. hledáme-li všechna $\vec{x}$ taková, že $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, pak musíme řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

tj. soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= a \\ \gamma x + \delta y &= b \end{aligned}$$

7.2 Příklad. Uvažujme lineární zobrazení určené následující maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chtěli bychom porozumět tomu, jak zobrazení funguje. Je zde drobný rozdíl oproti téměř všem lineárním zobrazením, které jsme potkali dosud: Obrazy obou vektorů kanonické báze leží na ose x , takže celé $\mathbb{R}^2$ se tímto zobrazením scvrkne do přímky dané osou x . Obligátní náčrtek toho, jak se transformuje souřadnicová síť nám zde nepomůže. Aspoň jedno pozorování jsme však učinili: Obor hodnot našeho lineárního zobrazení je osa x , tedy množina

$$\text{im } \mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nyní si můžeme nějaký bod $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ z oboru hodnot vybrat a ptát se, které všechny body $\mathbb{R}^2$ se na něj zobrazují. Hledáme tedy jeho *vzor*. To vede na rovnici $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kterou můžeme rozepsat jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x - 1y \\ 0x - 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

tedy soustavu

$$\begin{aligned} 1x - 1y &= a \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

Druhá rovnice pochopitelně nic neříká, řešíme tedy jen $x - y = a$. Řešením je zjevně přímka daná uvedenou rovnicí. Snadnou úpravou $x = a + y$ získáme parametrický tvar

$$\left\{ \begin{pmatrix} a + t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vzorem bodu $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ je tedy bod $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ samotný spolu s přímkou určenou vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jinými slovy naše zobrazení promítá všechny body roviny do osy x pod úhlem 45° .

Ne každé nebijektivní lineární zobrazení musí být nutně takto jednoduchou projekcí, ale některé vlastnosti budou platit obecně: Za prvé jsme si již v příkladě 2.6 všimli, že množina řešení soustavy s nulovou pravou stranou – tedy vzor nulového vektoru – bude vždy lineární podprostor. Za druhé bude obecně platit, že vzory jednotlivých bodů budou pouze posunutým vzorem nulového vektoru. To lze zdůvodnit následovně: Necht $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ je vzor nulového vektoru, tedy splňuje rovnici $x_0 - y_0 = 0$. Necht $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ je vzorem vektoru $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. splňuje rovnici $x_p + y_p = a$. Potom sečtením uvedených rovnic snadno nahlédneme, že i součet $\vec{x}_0 + \vec{x}_p$ musí být vzorem vektoru $\vec{b}$, neboť

$$(x_0 + x_p) - (y_0 + y_p) = a.$$

V této kapitole bude naším cílem uvedená pozorování řádně zformulovat. Všechny definice a věty uvedené v této kapitole formulujeme obecně pro lineární zobrazení. Aniž bychom to explicitně zmiňovali, zároveň je tímto definujeme i pro matice, neboť matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ lze vnímat jako lineární zobrazení $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$.

7.3 Cvičení. Rozmyslete si ekvivalence v řádcích následující tabulky.

Řešení soustavy	Hledání lin. komb.	Hledání vzoru
$\alpha x + \beta y = a$ $\gamma x + \delta y = b$	$x \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Úloha má alespoň jedno řešení.	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right\}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ je v oboru hodnot zobrazení $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$
Úloha má alespoň jedno řešení pro lib. $a, b \in \mathbb{R}$.	Vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ generují $\mathbb{R}^2$	Matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zobrazuje na celé $\mathbb{R}^2$
Úloha má nanejvýš jedno řešení pro lib. $a, b \in \mathbb{R}$.	Vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé.	Zobrazení dané maticí $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ je prosté.
Úloha má právě jedno řešení pro lib. $a, b \in \mathbb{R}$.	Vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$.	Zobrazení dané maticí $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ je bijekcí $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Tato kapitola se týká třetího sloupce. Mnoho tvrzení bude mít svůj předobraz v kapitolách o lineární nezávislosti, bázích a dimenzi, které byly o druhém sloupce.

7.4 Připomenutí. Píšeme-li $f: A \rightarrow B$, myslíme tím, že f je zobrazení, A je jeho definiční obor a body A se zobrazením f zobrazují do množiny B , tedy $f(x) \in B$

pro každé $x \in A$. Definiční obor je nedílnou součástí definice funkce. Formálně je funkce množina nějakých dvojic $f \subseteq A \times B$, splňující, že pro každé $x \in A$ existuje právě jeden partner $y \in B$ takový, že $(a, b) \in f$, nebo běžnějším zápisem $f(x) = y$. Množině B budeme říkat **cílová množina** a nemusí se shodovat s oborem hodnot, tj. může existovat $y \in B$ takové, že žádné x se na y nezobrazí.

Občas se můžeme zajímat o obraz celé množiny. Pro $M \subseteq A$ definujeme její **obraz** při zobrazení $f: A \rightarrow B$ jako $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$. Speciálně pro $M = A$ dostáváme **obor hodnot** $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Naopak pro $N \subseteq B$ můžeme studovat **vzor** této množiny $f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\}$.

Zobrazení f dále nazýváme

- **prosté** neboli **injektivní**, jestliže dvěma různým bodům přiřazuje různé hodnoty, tj. jestliže $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $x_1 = x_2$,
- **na** neboli **surjektivní**, jestliže je množina B opravdu oborem hodnot, tj. jestliže pro každé $y \in B$ máme $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- **bijektivní**, jestliže platí oboje zároveň.

Bijektivní zobrazení tedy představuje vzájemně jednoznačný vztah mezi množinami A a B . Pro bijektivní zobrazení a jen pro ně můžeme definovat zobrazení **inverzní** $f^{-1}: B \rightarrow A$ vztahem $f^{-1}(y) = x$ pro každé $y \in B$ takové, že $y = f(x)$, $x \in A$.

7.5 Poznámka. Na střední škole jste s těmito pojmy patrně zacházeli poněkud volněji. Cílovou množinu jste nejspíš vůbec neřešili, protože všechny vaše funkce zobrazovaly do $\mathbb{R}$. Stejně tak jste téměř vždy definiční obor měli určený *implicitně*: funkce byla určená nějakým vzorečkem, do kterého vás nenapadlo dosazovat nic jiného než reálná čísla a definiční obor byl největší podmnožinou $\mathbb{R}$, která do vzorce šla dosadit. Dále jste jako nutnou podmínku pro existenci inverzní funkce uváděli pouze prostotu, protože o surjektivitě jste neměli tušení. To jste mohli díky vašemu volnému zacházení s definičními obory: inverze takové funkce opět nemusela mít za definiční obor celé $\mathbb{R}$.

My tu ale budeme mít rozličné definiční obory a cílové prostory, a tak je třeba vždy řádně ujasnit, který myslíme. Zobrazení nám nebudou udávat jen způsob, jakým cosi spočítat, ale také případně určovat jistý vztah mezi definičním oborem a cílovou množinou. Proto bude užitečné rozlišovat mezi cílovou množinou a oborem hodnot.

7.6 Cvičení. Uvažujme zobrazení $f: A \rightarrow B$. Dokažte, že jestliže existuje zobrazení $g \in B \rightarrow A$ takové, že

- $g \circ f = \text{id}_A$, pak f je injektivní,
- $f \circ g = \text{id}_B$, pak g je surjektivní.

Jestliže tedy pro nějaké g platí oboje, musí být f bijekce. V jakém vztahu jsou pak f a g ?

7.7 Cvičení. Necht $f: A \rightarrow B$ je bijekce, $g: B \rightarrow A$ nějaké zobrazení. Dokažte, že jestliže $f \circ g = \text{id}_B$ nebo³⁰ $g \circ f = \text{id}_A$, pak g je bijekce a platí $g = f^{-1}$.

³⁰ Píšu záměrně *nebo* zatímco v předchozím cvičení jsem psal *a*. Zde jsme totiž zesílili předpoklady a předpokládáme, že f je bijekce.

7.8 Definice. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Lineární zobrazení $A: V \rightarrow W$ nazveme

- **monomorfismus**, jestliže je injektivní,
- **epimorfismus**, jestliže je surjektivní,
- **izomorfismus**, jestliže je bijektivní.

Lineárnímu operátoru (nebo ještě častěji čtvercové matici), který je bijektivní se říká **regulární** operátor (či matice). Dva lineární prostory, mezi kterými existuje izomorfismus, se nazývají **izomorfní**.

7.9 Poznámka. Výše uvedená definice pojmu *izomorfních prostorů* formalizuje pozorování, že některé lineární prostory jsou „v podstatě stejné“. Platí například, že $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$ je izomorfní s $\mathbb{R}^{n+1}$. Obecně přiřazení souřadnicového vektoru k abstraktnímu v nějakém lineárním prostoru je izomorfismus. Definujeme-li takový pojem, čekáme od něj, že bude tzv. *ekvivalencí*. Pokud je V „v podstatě stejný jako“ W , měl by taky být W „v podstatě stejný jako“ V . Relace *být izomorfní* by tedy měla být *symetrická*. To dokážeme v následující větě. Rovněž bychom čekali, že relace bude *tranzitivní*: je-li U izomorfní s V a V izomorfní s W , pak bude U izomorfní s W . To plyne z věty o linearitě složeného zobrazení (a faktu, že skládáním bijekcí dostaneme bijekci). Nakonec nesmíme zapomenout na tu nejjednodušší vlastnost, kterou by každá ekvivalence měla splňovat: Každý lineární prostor je izomorfní sám se sebou prostřednictvím identického zobrazení.

7.10 Věta. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$, $A: V \rightarrow W$ lineární izomorfismus. Pak je i zobrazení $A^{-1}: W \rightarrow V$ lineární.

Důkaz. Buďte $\vec{x}, \vec{y} \in W$ a $\alpha \in \mathbb{F}$. Potom musí existovat $\vec{u}, \vec{v} \in V$ takové, že $\vec{x} = A\vec{u}$, $\vec{y} = A\vec{v}$. Zároveň platí, že $A(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \alpha A\vec{u} + A\vec{v} = \alpha\vec{x} + \vec{y}$. Tím pádem máme $A^{-1}(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{u} + \vec{v} = \alpha A^{-1}\vec{x} + A^{-1}\vec{y}$. $\square$

7.11 Poznámka. Vysvětleme na výše uvedených příkladech přesněji, co myslíme tím, že definice pojmu pro lineární operátor indukuje příslušný pojem pro matice. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ prostřednictvím maticového násobení lineárně zobrazuje $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$. Takovou matici tedy nazýváme **regulární**, jestliže toto příslušné lineární zobrazení je bijektivní. Tot definice. Za každou takovou definicí si můžeme jako cvičení ještě dokázat větu, že stejná charakterizace by fungovala v libovolných bázích. Dokažte tedy, že máme-li lineární prostory V a W nad $\mathbb{F}$ totožné konečné dimenze a $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou jejich báze, pak je lineární operátor $A \in \text{Lin}(V, W)$ izomorfismem právě tehdy, když je matice $[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$ regulární.³¹ Pokud se vám tvrzení dokazovat nechce, pokuste se alespoň řádně si uvědomit onen drobný rozdíl: Uvedené tvrzení pro speciální případ prostoru aritmetických vektorů $V = W = \mathbb{F}^n$ a jeho kanonické báze $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{E}$ bylo *definicí* pojmu regulární matice. Nyní však tvrdíme, že uvedená charakterizace platí pro libovolnou dvojici lineárních prostorů a libovolnou dvojici bází.

³¹ Náznak důkazu: Označme $X: V \rightarrow \mathbb{F}^n$ souřadnicový izomorfismus $\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_{\mathcal{X}}$. Podobně $Y: W \rightarrow \mathbb{F}^n$ pro bázi $\mathcal{Y}$. Potom $[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = YAX^{-1}$. Složením bijekcí je bijekce, čili je-li A izomorfismem, je výsledná matice regulární. Naopak $A = Y^{-1}[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}X$ a platí stejná argumentace.

Podobně definujeme pojem **inverzní matice** k zadané regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. To bude taková matice $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, pro kterou platí $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \vec{x}$, jinými slovy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Nyní jako cvičení dokažte, že pro libovolný izomorfismus $A: V \rightarrow W$ a libovolné báze příslušných prostorů $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ platí $[A^{-1}]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}} = ([A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}})^{-1}$. Zajímavým důsledkem je, že inverzí matice přechodu od jedné báze k druhé je matice přechodu opačným směrem $([\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}})^{-1} = [\text{id}]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}}$.

7.12 Definice. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$, $A \in \text{Lin}(V, W)$. Definujeme

- **obraz** A jako jeho obor hodnot: $\text{im } A = A(V) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in V\}$,
- **jádro** A jako vzor nulového vektoru: $\ker A = A^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$.

7.13 Věta. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$, $A \in \text{Lin}(V, W)$. Potom

- $\text{im } A$ je lineární podprostor W ,
- $\ker A$ je lineární podprostor V .

Důkaz. Pro první vlastnost vezmeme $\vec{v}, \vec{w} \in \text{im } A$ a $\alpha \in \mathbb{F}$. Fakt, že $\vec{v} \in \text{im } A$ však znamená, že existuje nějaké $\vec{x} \in V$ takové, že $\vec{v} = A\vec{x}$. Podobně máme $\vec{w} = A\vec{y}$ pro nějaké $\vec{y} \in V$. Pak $\alpha\vec{v} + \vec{w} = \alpha A\vec{x} + A\vec{y} = A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) \in \text{im } A$.

Pro druhou vlastnost vezmeme $\vec{x}, \vec{y} \in \ker A$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Potom však $A(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y} = \alpha\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, tedy $\alpha\vec{x} + \vec{y} \in \ker A$. $\square$

7.14 Cvičení. Dokažte, že platí obecnější tvrzení: Obraz libovolného lineárního podprostoru je lineární podprostor. Vzor libovolného lineárního podprostoru je lineární podprostor.

7.15 Pozorování. Pro $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ máme (dokažte!)

$$A(\text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}) = \text{span}\{A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n\}.$$

Máme-li tedy $V = \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, pak $\text{im } V = \text{span}\{A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n\}$.

Speciálně uvažujme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ a označme $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ její sloupcečky. Ta popisuje lineární zobrazení $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ přičemž má ve sloupčcích obrazy vektorů kakonické báze. Máme tedy

$$\text{im } \mathbf{A} = \text{im}(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}.$$

Obrazu matice se proto v angličtině občas říká *column space*.

7.16 Definice. Dimenze obrazu lineárního zobrazení A se nazývá **hodnost** A a značí se $\text{rank } A = \dim \text{im } A$. Dimenze jádra lineárního zobrazení A se nazývá **defekt** A a značí se $\text{def } A = \dim \ker A$.

7.17 Věta. Buďte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Lineární zobrazení $A: V \rightarrow W$ je prosté (monomorfismus) právě tehdy, když $\ker A = \{\vec{0}\}$, tedy $\text{def } A = 0$.

Důkaz. ($\Rightarrow$): Protože $\ker A$ je podprostor V , musí určitě obsahovat nulový vektor. Zobrazení je prosté právě tehdy, když je vzorem jednoho bodu vždy nanejvýš jeden bod. Speciálně vzorem nulového vektoru – jádrem zobrazení – tedy musí být pouze nulový vektor.

($\Leftarrow$): Z rovnosti $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2$ pro $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ plyne $\vec{0} = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$. Jestliže jádro obsahuje pouze nulový vektor, pak $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$, tedy $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. $\square$

Dokážeme teď o něco víc:

7.18 Věta. Budte V a W lineární prostory nad $\mathbb{F}$, $A \in \text{Lin}(V, W)$, $\vec{b} \in W$. Necht pro nějaké $\vec{x}_p \in V$ platí $A\vec{x}_p = \vec{b}$. Potom lze vzor vektoru $\vec{b}$ zapsat jako

$$A^{-1}\{\vec{b}\} = \{\vec{x}_p\} + \ker A = \{\vec{x}_p + \vec{x}_0 \mid \vec{x}_0 \in \ker A\}.$$

Důkaz. Pro inkluzi $\supseteq$ vezměme nějaké $\vec{x}_0 \in \ker A$ a dokažme, že $\vec{x}_p + \vec{x}_0$ je vzorem $\vec{b}$. Vskutku: $A(\vec{x}_p + \vec{x}_0) = A\vec{x}_p + A\vec{x}_0 = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$, což jsme potřebovali.

Pro inkluzi $\subseteq$ vezměme nějaké $\vec{x} \in A^{-1}\{\vec{b}\}$, tj. vektor splňující $A\vec{x} = \vec{b}$. Chceme dokázat, že lze zapsat ve tvaru $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_0$ pro nějaké $\vec{x}_0 \in \ker A$. Definujme tedy $\vec{x}_0 = \vec{x} - \vec{x}_p$. Stačí pak dokázat, že $\vec{x}_0 \in \ker A$. To vskutku platí: $A\vec{x}_0 = A(\vec{x} - \vec{x}_p) = A\vec{x} - A\vec{x}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$. $\square$

7.19 Věta (o dimenzi jádra a obrazu). Budte V, W lineární prostory nad $\mathbb{F}$ a necht $A: V \rightarrow W$ je lineární zobrazení. Potom platí

$$\dim V = \text{rank } A + \text{def } A.$$

7.20 Cvičení. Dokažte větu pro speciální případ prostého zobrazení, kdy $\text{def } A = 0$.

Důkaz. V důkazu budeme předpokládat, že $\dim V = n < \infty$. Z toho pak plyne, že $\text{def } A = k < \infty$ neboť $\ker A$ je lineární podprostor V a že $\text{rank } A < \infty$ neboť obraz je generován obrazy generátorů V .

Necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je báze $\ker A$. Tuto bázi můžeme doplnit na bázi V $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{n-k})$. Označme ještě $\vec{z}_i = A\vec{y}_i \in W$ obrazy příslušných bazických vektorů. Tvrdíme, že $(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{n-k})$ je lineárně nezávislá posloupnost a tvoří tedy bázi $\text{im } A$. Vezměme proto lineární kombinaci $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \vec{z}_i = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i A\vec{y}_i = A \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \vec{y}_i$. Znamená to, že $\vec{v} := \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \vec{y}_i \in \ker A$. To ale znamená, že lze vyjádřit pomocí báze $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$, takže $\vec{v} = \sum_{i=1}^k \beta_i \vec{x}_i$. Odečtením těchto dvou vyjádření máme $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \vec{y}_i - \sum_{i=1}^k \beta_i \vec{x}_i$. Z lineární nezávislosti báze $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{n-k})$ máme, že všechny koeficienty jsou nulové, což jsme chtěli dokázat. Platí tedy $\text{rank } A = n - k = \dim V - \text{def } A$.

Zbývá okomentovat situaci, kdy $\dim V = \infty$. Musíme dokázat, že pak $\text{rank } A = \infty$ nebo $\text{def } A = \infty$. Tuto situaci zde nebudeme podrobně rozebírat, neboť pro lineární algebru není podstatná. Důkaz by šlo vést takto: Předpokládejme, že $\text{def } A < \infty$. Musíme dokázat, že $\text{rank } A = \infty$. Zopakujeme konstrukci z předchozího odstavce s tím, že bázi $\ker A$ doplníme na lineárně nezávislou posloupnost libovolné délky. Tak dostaneme lineárně nezávislou posloupnost libovolné délky v $\text{im } A$ a tím pádem má $\text{im } A$ dimenzi nekonečno. $\square$

7.21 Důsledek. Bud V lineární prostor nad $\mathbb{F}$ konečné dimenze, $A \in \text{Lin}(V)$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní.

- A je izomorfismus,
- A je monomorfismus,

- A je epimorfismus.

V řeči matic toto tvrzení říká, že je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ čtvercová matice, pak jsou ekvivalentní následující výroky o sloupečcích matice: tvoří bázi $\mathbb{F}^n$, jsou lineárně nezávislé, generují $\mathbb{F}^n$. Toto tvrzení jsme zformulovali již dávno jako důsledek 4.15. Dokažme ho teď znovu pomocí věty o dimenzi jádra a obrazu.

Důkaz. Evidentně stačí dokázat ekvivalenci druhého a třetího tvrzení. A je podle věty 7.17 monomorfismus právě tehdy, když $\dim \ker A = 0$, což je podle věty 7.19 ekvivalentní tomu, že $\dim V = \text{rank } A = \dim \text{im } A$, což je podle věty 4.16 ekvivalentní tomu, že $V = \text{im } A$. $\square$

7.22 Poznámka. Pozor, předpoklad $\dim V < \infty$ je v této větě důležitý. Operátor derivování $D: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ je epimorfismus a není monomorfismus. Operátor integrování $S: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ je monomorfismus a není epimorfismus. Rozmyslete si, která z ekvivalencí v důkazu důsledku neplatí.

8 Řešení soustav lineárních rovnic

8.1 Frobeniova věta

Uvědomme si teď tedy jednou pro vždy, že úloha vyřešit soustavu n rovnic o m neznámých nad tělesem $\mathbb{F}$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

je ekvivalentní řešení maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

O rovnici $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ tedy budeme hovořit jako o *soustavě* a naopak, budeme-li se chtít zabývat soustavami, budeme je zkráceně psát ve tvaru $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ abychom si zjednodušili práci. Matici $\mathbf{A}$ budeme říkat **matice soustavy**. Matici $(\mathbf{A} \mid \vec{b})$ tj. matici $\mathbf{A}$ rozšířenou vektorem $\vec{b}$ o jeden sloupeček navíc budeme říkat **rozšířená matice soustavy**. Vektor $\vec{b}$ se nazývá **sloupec pravých stran**. Soustava se nazývá **homogenní** nebo **bez pravé strany**, jestliže $\vec{b} = \vec{0}$.

Nakonec ještě připomeňme, že výše uvedená úloha $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ lze rovněž ekvivalentně popsat jako úloha napsat vektor $\vec{b}$ jako lineární kombinaci sloupců matice $\mathbf{A}$.

V minulé kapitole jsme udělali veškerou potřebnou přípravu k tomu, abychom nyní slavnostně mohli formulovat větu, která charakterizuje řešení soustav lineárních rovnic.

8.1 Věta (Frobeniova³²). Bud' $\mathbb{F}$ těleso.

1. Množina řešení soustavy homogenní soustavy lineárních rovnic s n neznámými je lineární podprostor $\mathbb{F}^n$ dimenze $n - \text{rank}(\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A}$ je matice soustavy.
2. Soustava lineárních rovnic má řešení právě tehdy, když je hodnost rozšířené matice soustavy stejná jako hodnost matice soustavy.
3. Necht' $\vec{x}_p$ je nějaké řešení dané soustavy lineárních rovnic. Necht' S_0 je množina řešení téže soustavy, avšak s nulovou pravou stranou. Potom lze množinu řešení původní soustavy vyjádřit jako

$$S = \vec{x}_p + S_0 = \{x_p + x_0 \mid x_0 \in S_0\}.$$

Důkaz. První bod je jasný hned uvědomíme-li si, že množina řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ je jádro matice $\ker \mathbf{A}$, což je podprostor jehož dimenzi udává věta 7.19.

Pro druhý bod označme $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sloupce matice soustavy. Soustava s pravou stranou $\vec{b}$ tedy má řešení právě tehdy, když $\vec{b} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$. Snadno rozmyslíme, že tento požadavek je ekvivalentní rovnosti

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}.$$

Nakonec je jasné, že když tato platí rovnost uvedených lineárních obalů, musejí se rovnat jejich dimenze. Naopak jelikož levá strana je vždy uvnitř pravé, tak rovnost dimenzí musí podle věty 4.16 implikovat rovnost podprostorů. No a lineární obal vlevo je obraz matice soustavy, tedy jeho dimenze je její hodnost. Lineární obal vpravo je obraz rozšířené matice soustavy.

Třetí bod je opět již dokázaný a sice větou 7.18. Uvažujme soustavu $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Pak jejím řešením S je vzor vektoru $\vec{b}$ při zobrazení $A\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}$. Množina řešení soustavy s nulovou pravou stranou je, jak jsme již zmínili, jádro $S_0 = \ker A = \ker \mathbf{A}$. $\square$

8.2 Úloha. Vyřešte následující rovnici nad $\mathbb{R}$ užitím Frobeniovy věty.

$$x - y + 2z = 3$$

Řešení. Jedná se o jednu rovnici o třech neznámých $x, y, z \in \mathbb{R}$. Rozšířená matice soustavy je tvaru

$$(1 \quad -1 \quad 2 \mid 3)$$

Hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je evidentně rovna jedné, takže soustava má řešení. To nás příliš nepřekvapuje. Dokonce bychom řekli, že ať si za y a z zvolíme cokoliv, najdeme vhodné x , aby trojice (x, y, z) tvořila řešení.

³² **Ferdinand Georg Frobenius**, 1849–1917, německý matematik, jenž byl jedním z mnoha, kteří se na konci 19. století soustavami lineárních rovnic zabývali a snažili se charakterizovat jejich řešitelnost a množinu řešení. Jeho přínos tkvěl především v zavedení pojmu hodnosti matice. Nutno však říci, že jako *Frobeniova věta* je tento výsledek označován pouze v Česku a na Slovensku. V různých dalších jazycích se objevují jména Rouché, Capelli, Kronecker nebo Fontené.

Dále nám Frobeniova věta říká: „Nechtěl bys nejdřív zkusit vyřešit rovnici bez pravé strany?“ Odpovídáme: „Dobrá.“ Frobeniova věta na to: „Množina řešení bude lineární podprostor $\mathbb{R}^3$ dimenze $\dim \mathbb{R}^3 - \text{rank } \mathbf{A} = 3 - 1 = 2$.“ Bereme tedy na vědomí a řešíme rovnici $x - y + 2z = 0$. Rada, kterou nám Frobeniova věta poskytla znamená, že se nemusíme nějak komplikovaně snažit parametrizovat všechna řešení. Stačí najít dvě lineárně nezávislá řešení, ta potom už určitě budou generovat celou množinu řešení podle důsledku 4.15. To celkem zjednodušuje počítání, protože si můžeme zvolit třeba $y = 1, z = 0$ a dopočítat $x = 1$; případně zvolit $y = 0$ a $z = 1$ a dopočítat $x = -2$. Naši chytrou volbou proměnných y a z jsme zajistili, že nalezené vektory musejí být lineárně nezávislé, neboť nemůže být jeden násobkem druhého. Zjistili jsme tedy, že množina řešení rovnice s nulovou pravou stranou vypadá následovně:

$$\ker \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nalezení řešení původní rovnice $x - y + 2z = 3$ už bude snadné. Frobeniova věta radí, že nemusíme hledat všechna řešení, stačí najít jedno, ostatní dostaneme automaticky díky předchozímu výpočtu. Protože si můžeme zvolit y a z libovolně a dopočítat x , zvolíme si to nejjednodušší možné $y = 0$ a $z = 0$. Dopočítáme $x = 3$. Množina všech řešení je tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pokud bychom tento výsledek chtěli komunikovat někomu, kdo snad se základními pojmy lineární algebry není obeznámen, snadno převedeme do parametrického tvaru $x = 3 + t - 2s, y = t, z = s, t, s \in \mathbb{R}$.

Pro obecnou matici soustavy $\mathbf{A}$ tyto triky asi nebudeme moci použít. Ale existuje takový speciální tvar matic, kde to půjde.

8.3 Úloha. Vyřešte soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Řešení. Po krátkém zamyšlení a přepsání matice do řeči rovnic dospějeme k závěru, že tuto soustavu hravě vyřešíme aniž bychom k tomu jakkoliv využili Frobeniovu větu. Označme proměnné x, y, z . Poslední rovnice říká $2z = 2$, z čehož zřejmě $z = 1$. Předposlední rovnice říká $3y - z = -1$. Můžeme do ní dosadit již spočítané $z = 1$ a hravě dostaneme $y = 0$. Nakonec z první rovnice můžeme s využitím již obdržených výsledků dostat $x = 1$ a vidíme, že soustava má právě jedno řešení. Matice soustavy byla ve speciálním *horním trojúhelníkovém* tvaru s *nenulovými prvky na diagonále*. Pro takové matice soustavy vždy zafunguje uvedený algoritmus zvaný *zpětná substituce*.

Zkonzultujme přece jen tento výsledek s Frobeniovou větou. V matici soustavy máme tři sloupcečky a žádný z nich zjevně není kombinací předchozích, jsou tedy lineárně nezávislé. Hodnost matice soustavy je rovna třem a hodnost rozšířené matice soustavy jakbysmet, neboť vyšší než tři být nemůže, když má matice jen tři řádky. Řešení tedy existuje. Navíc je právě jedno, protože defekt matice soustavy je roven $3 - 3 = 0$. Frobeniova věta nám tedy potvrdila, že existuje právě jedno řešení. S jeho nalezením nám však pomoci již nedokáže. Ještě že jsme si dokázali pomoci sami.

8.4 Definice. Buď $\mathbb{F}$ těleso. Řekneme, že matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je v **horním stupňovitém tvaru**, jestliže existují celá čísla $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_m < n$ taková, že pro každé $i = 1, \dots, m$ máme $\mathbf{A}_{ik_i} \neq 0$ a pro každé $j < k_i$ máme $\mathbf{A}_{ij} = 0$. Sloupcům s indexy k_i říkáme **hlavní sloupce**, ostatním říkáme **vedlejší sloupce**, nenulovým číslům $\mathbf{A}_{ik_i}$ říkáme **pivoty**.

8.5 Úloha. Vyřešte soustavu s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Řešení. Jedná se o soustavu tří rovnic a sedmi neznámých. Jak matice soustavy, tak rozšířená matice soustavy jsou v horním stupňovitém tvaru, přičemž druhý, čtvrtý a pátý sloupec je hlavní zatímco první, třetí a šestý, sedmý (a sloupec pravých stran) jsou vedlejší. Snadno vidíme, že hlavní sloupce jsou vzájemně lineárně nezávislé, zatímco každý vedlejší je lineární kombinací předchozích. Z toho rovněž plyne, že hodnost obou matic je počet hlavních sloupců, tedy tři. Soustava tedy má řešení, což nás opět nepřekvapuje, neboť si snadno rozmyslíme, že za proměnné odpovídající vedlejším sloupcům můžeme volit jakékoliv číslo a řešení soustavy snadno dopočítáme zpětnou substitucí.

Máme-li sedm neznámých a hodnost matice tři, Frobeniova věta nám říká, že soustava s nulovou pravou stranou bude lineárním podprostorem $\mathbb{R}^7$ dimenze $7 - 3 = 4$. Hledáme tedy čtyři lineárně nezávislá řešení, která už nutně musejí generovat celý lineární prostor. Protože za proměnné odpovídající vedlejším sloupcům můžeme volit cokoli, volme následovně: $x_1 = 1, x_3 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0$ pro první řešení, přičemž dopočítáme z poslední rovnice $x_5 = 0$, dosazením do předchozí $x_4 = 0$, dosazením do první $x_2 = 0$. Pro druhé řešení volme do $x_1 = 0, x_3 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0$. Opět nám vyjde $x_5 = x_4 = x_2 = 0$. Podobně dopočítáme další dvě řešení a dojdeme k závěru

$$\ker \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nakonec stačí najít jedno řešení původní soustavy. Volme $x_1 = x_3 = x_6 = x_7 = 0$, pak snadno dopočítáme z poslední rovnice $x_5 = 1$ dosazením této hodnoty

do druhé rovnice $x_4 = -1$, dosazením těchto hodnot do první rovnice $x_2 = -2$. Řešením soustavy je tedy množina

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Mimochodem první dva generátory lineárního obalu nám říkají, že hodnota první a třetí proměnné může být libovolná. To nás opět vůbec nepřekvapuje, protože se tyto proměnné v soustavě vůbec nevyskytují.

8.6 Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je matice v horním stupňovitém tvaru. Potom hlavní sloupce $\mathbf{A}$ tvoří bázi $\text{im } \mathbf{A}$. Jejich počet (a tím i počet nenulových řádků v $\mathbf{A}$) tedy odpovídá hodnosti matice $\mathbf{A}$.

Důkaz. Označme r počet nenulových řádků matice $\mathbf{A}$. Žádný (řekněme i -tý, tj. na pozici k_i) hlavní sloupec nemůže být lineární kombinací předchozích, neboť má v i -tém řádku nenulové číslo, zatímco všechny předchozí tam měly nulu. Ze stejného důvodu je zřejmé, že v obrazu $\mathbf{A}$ mohou být jediné vektory, které mají nenulová čísla pouze na prvních r pozicích a ostatní jsou nuly. Obraz bude tedy nanejvýš r -rozměrný. Protože jsme našli r -prvkovou lineárně nezávislou množinu v $\text{im } \mathbf{A}$, musí to být její báze. $\square$

8.2 Gaussova eliminace

8.7 Definice. Následujícím úpravám dané matice budeme říkat **elementární řádkové úpravy**.

1. Prohození dvou řádků.
2. Vynásobení řádku nenulovým skalárem.
3. Přičtení libovolného skalárního násobku jednoho řádku k jinému.

8.8 Věta. Buď $\mathbb{F}$ těleso, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{F}^m$. Elementární řádkové úpravy rozšířené matice soustavy $(\mathbf{A} \mid \vec{b})$ nemění množinu řešení $\{\vec{x} \in \mathbb{F}^n \mid \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}\}$.

Důkaz. U prohazování řádků je to jasné. Pro druhou úpravu stačí uvažme k -tý řádek a nenulový skalár $\gamma \in \mathbb{F}$. Stačí ukázat, že rovnice $\mathbf{A}_{k1}x_1 + \dots + \mathbf{A}_{kn}x_n = b_k$ je ekvivalentní rovnici $\gamma\mathbf{A}_{k1}x_1 + \dots + \gamma\mathbf{A}_{kn}x_n = \gamma b_k$, což je známá věc. (Zleva doprava se dostaneme vynásobením původní rovnice číslem γ zatímco zprava doleva násobíme γ^{-1} .) Podobně se to ukáže pro třetí bod. $\square$

8.9 Věta. Každou matici lze pomocí sledu elementárních řádkových úprav 1. a 3. převést na horní stupňovitý tvar.

Důkaz. Lze snadno rozmyslet, že k cíli povede následující algoritmus. $\square$

8.10 Algoritmus (Gaussova³³ eliminační metoda). Vstupem je matice $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, kterou v průběhu algoritmu budeme upravovat až k hornímu stupňovitému tvaru.

Algoritmus inicializujeme položením $j = 1, l = 1$. Dále opakujeme následující kroky dokud $j \leq n$ a $l \leq m$:

1. Je-li $\mathbf{B}_{ij} = 0$ pro každé $i \geq l$, polož $j = j + 1$ a opakuj bod 1.
2. Je-li $\mathbf{B}_{lj} = 0$, najdi $k > l$ takové, že $\mathbf{B}_{kj} \neq 0$. Prohoď řádky k a l .
3. Pro každé $i > l$ odečti od i -tého řádku $(\mathbf{B}_{ij}/\mathbf{B}_{lj})$ -násobek l -tého. Polož $l = l + 1, j = j + 1$ a vrať se do bodu 1.

8.11 Úloha. Pomocí Gaussovy eliminace vyřešte soustavu s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Vidíme, že eliminace vedla na horní trojúhelníkový tvar s nenulovými prvky na diagonále, a tak řešení bude opět právě jedno a půjde snadno najít zpětnou substitucí. Jako alternativu můžeme v úpravách pokračovat následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nyní již prostě za čarou přečteme výsledek $(1, 0, 2, 1)$.

³³ **Carl Friedrich Gauss**, 1777–1855, snad netřeba představovat.

8.12 Algoritmus (Gaussova–Jordanova³⁴ eliminace³⁵). Vstupem je matice $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Proveď nejdřív standardní Gaussovu eliminaci. Označ $k_1, \dots, k_r$ hlavní sloupce. Pak pro $i = r, r-1, \dots, 1$ opakuj následující:

1. Vyděl i -tý řádek číslem $\mathbf{B}_{ik_i}$.
2. Pro každé $j < i$ odečti od j -tého řádku $\mathbf{B}_{jk_i}$ -násobek i -tého.

Výsledný tvar matice se nazývá **redukovaný stupňovitý tvar**.

8.13 Cvičení. Upravte matici z úlohy 8.5 na redukovaný tvar. Zkuste ve výsledné matici *uvídnout* množinu řešení soustavy.

8.14 Úloha. Najděte inverzi matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Řešení. Uvedená matice prostřednictvím maticového násobení působí jako lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. My se snažíme najít matici $\mathbf{A}^{-1}$ inverzního zobrazení $A^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ta bude mít ve sloupečcích vektory $A^{-1}\vec{e}_1$ a $A^{-1}\vec{e}_2$ – jednoznačně určené vzory vektorů kanonické báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Musíme tyto vzory najít, tedy vyřešit rovnice $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{e}_1$ a $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{e}_2$. Obě rovnice mají totožnou matici soustavy, a tak je lze výhodně řešit naráz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Řešením jsou sloupečky $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Z toho, že rovnice měly jednoznačné řešení zároveň můžeme usoudit, že původní matice vskutku byla regulární, a tedy mělo smysl určovat její inverzi. Tou je tedy matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní předvedeme alternativní způsob důkazu, že řádkové úpravy zachovávají množinu řešení, pomocí maticové interpretace řádkových úprav. Tím zároveň dokážeme, že řádkové úpravy zachovávají spoustu dalších věcí.

³⁴ **Wilhelm Jordan**, 1842–1899, německý geodet, který často řešil soustavy lineárních rovnic.

³⁵ *Gaussova–Jordanova eliminace* či *úplná Gaussova eliminace* jsou běžné názvy procedury, která upraví matici na redukovaný stupňovitý tvar. Nicméně je potřeba říci, že se pod tímto názvem nemyslí jeden konkrétní algoritmus. Snadno ověříte, že algoritmus formulovaný zde vlastně provádí přesně tytéž výpočty, jako byste prováděli při zpětné substituci. Doc. Habala na předmětu DRN formuluje Gaussovu–Jordanovu eliminaci trochu jinak – pivoty normalizuje již při dopředném chodu –, aby pak mohl slavnostně prohlásit, že je Gaussova–Jordanova eliminace blbá, protože je výpočetně náročnější než standardní eliminace se zpětnou substitucí.

8.15 Lemma. Elementární řádkové úpravy matice $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ lze realizovat vynásobením matice $\mathbf{B}$ regulární maticí $\mathbf{T} \in \mathbb{F}^{m \times m}$ zleva, kde $\mathbf{T} = (\vec{t}_1 \ \dots \ \vec{t}_m)$, přičemž

1. Pro prohození k -tého a l -tého řádku pokládáme $\vec{t}_i = \vec{e}_i$ pro $i \neq k, l$, $\vec{t}_k = \vec{e}_l$, $\vec{t}_l = \vec{e}_k$.
2. Pro vynásobení k -tého řádku nenulovým číslem $\alpha \in \mathbb{F}$ pokládáme $\vec{t}_i = \vec{e}_i$ pro $i \neq k$, $\vec{t}_k = \alpha \vec{e}_k$.
3. Pro přičtení α -násobku k -tého řádku k l -tému pokládáme $\vec{t}_i = \vec{e}_i$ pro $i \neq l$, $\vec{t}_l = \vec{e}_l + \alpha \vec{e}_k$.

Důkaz. Snadno rozmyslíme, že matice příslušným způsobem transformuje vektory. Například vezmeme-li matici $\mathbf{T}$ ze třetího případu a vektor $\vec{b} = \sum_{i=1}^m b_i \vec{e}_i$, dostaneme

$$\mathbf{T}\vec{b} = \sum_i b_i \vec{t}_i = \sum_{i \neq k} b_i \vec{e}_i + b_k(\vec{e}_k + \alpha \vec{e}_l) = \sum_i b_i \vec{e}_i + \alpha b_k \vec{e}_l.$$

Nakonec pro obecnou matici $\mathbf{B}$ můžeme označit její sloupcečky $\mathbf{B} = (\vec{b}_1 \ \dots \ \vec{b}_n)$. Levé násobení maticí pak působí po sloupcích:

$$\mathbf{TB} = (\mathbf{T}\vec{b}_1 \ \dots \ \mathbf{T}\vec{b}_n).$$

Nakonec lze ve všech případech snadno ověřit, že k uvedeným transformacím existuje inverze, takže je příslušná matice regulární. $\square$

8.16 Věta. Matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ lze převést sledem elementárních řádkových úprav na matici $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{T} \in \mathbb{F}^{m \times m}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{TA}$.

Důkaz. Implikace $(\Rightarrow)$ je důsledkem předchozího lemmatu. Sled ekvivalentních řádkových úprav nám dá sled regulárních matic $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_l$ takový, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}_l \mathbf{T}_{l-1} \dots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$. Hledaná regulární matice je tedy součinem $\mathbf{T} = \mathbf{T}_l \dots \mathbf{T}_1$.

Pro opačnou implikaci uvažujme regulární matici $\mathbf{T}$. Pak je její inverze $\mathbf{T}^{-1}$ rovněž regulární a Gaussovou–Jordanovou eliminací ji můžeme převést na jednotkovou matici $\mathbf{E}$. Tím získáme sled elementárních řádkových úprav a příslušných regulárních matic takový, že $\mathbf{E} = \mathbf{T}_l \dots \mathbf{T}_1 \mathbf{T}^{-1}$, tedy $\mathbf{T} = \mathbf{T}_l \dots \mathbf{T}_1$. Pakliže $\mathbf{B} = \mathbf{TA}$, musí vést od $\mathbf{A}$ k $\mathbf{B}$ sled týchž řádkových úprav. $\square$

Interpretace tohoto výsledku je taková, že při elementárních řádkových úpravách jsou sloupcečky jedné výsledné pouze izomorfním obrazem sloupceček druhé matice. Jejich vzájemný vztah tedy zůstává stejný: Zůstává stejné to, zda je jeden sloupecček kombinací jiných, zda jsou lineárně závislé či nezávislé. Můžeme tento výsledek použít ke znovudokázání faktu, že se řádkovými úpravami nemění množina řešení. Rovněž můžeme dokázat, že se nemění hodnost matice:³⁶

³⁶ To už ale taky víme, ne? Hodnost matice nám udává (prostřednictvím věty o dimenzi) dimenzi jejího jádra, tj. množinu řešení soustavy s nulovou pravou stranou. Když víme, že se řádkovými úpravami nemění množina řešení, nemůže se měnit ani dimenze této množiny, a tedy ani hodnost matice.

8.17 Důsledek. Elementární řádkové úpravy zachovávají hodnotu matice

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{B}$ vznikla sledem elementárních řádkových úprav z matice $\mathbf{A}$, tedy existuje regulární matice $\mathbf{T}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{TA}$. Taková matice $\mathbf{T}$ představuje izomorfismus, a tedy prosté zobrazení. Toto prosté zobrazení můžeme zúžit na $\text{im } \mathbf{A}$, čímž zůstane prosté. Podle věty o dimenzi jádra a obrazu pak musí platit, že dimenze definičního oboru se rovná dimenzi oboru hodnot, tedy $\dim \text{im } \mathbf{A} = \dim \text{im}(\mathbf{TA})$, tedy $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B}$. $\square$

8.18 Poznámka. Pakliže víme, že bude potřeba opakovaně řešit soustavy se stejnou regulární maticí $\mathbf{A}$, ale různými vektory pravých stran, přičemž ony zadání neznáme všechny předem – vektory pravých stran se budou objevovat průběžně a průběžně budeme potřebovat odevzdávat výsledky – nabízí se spočítat si inverzi $\mathbf{A}^{-1}$ dané matice. V numerické matematice se učí dělat něco trochu jiného: matice soustavy $\mathbf{A}$ se upraví na horní trojúhelníkový tvar $\mathbf{U}$ (horní stupňovitý je u regulární matice horní trojúhelníkový s nenulovými čísly na diagonále) a poznamenáme si příslušnou transformační matici $\mathbf{T}$. Přitom navíc platí, že lze vyjádřit $\mathbf{T} = \mathbf{PL}^{-1}$, kde $\mathbf{P}$ je tzv. *permutační matice* (kódující prohazování řádků, které jsme dělali) a $\mathbf{L}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále (kódující odčítání příslušných α -násobků). Jedná se o tzv. *LUP rozklad*. Má to výhodu takovou, že se při tom omezí na minimum množství zaokrouhlovacích chyb. Více v předmětu DRN od doc. Habaly.

8.19 Poznámka. Důsledkem výše uvedených pozorování je, že Gaussovou–Jordanovou eliminací lze pro zadané matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ efektivně spočítat součin $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ (za předpokladu, že $\mathbf{A}$ je regulární). Stačí provést Gaussovou–Jordanovu eliminaci pro matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$, čímž dospějeme k výsledku $(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$. To se nám může hodit pokud například řešíme maticovou rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ pro neznámou matici $\mathbf{X}$.

8.20 Úloha. Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Bohužel matice $\mathbf{A}$ není čtvercová, takže výše uvedenou poznámku nemůžeme použít. Začneme nejprve rozmyšlením, jakého tvaru musí být matice $\mathbf{X}$. Aby šlo provést součin $\mathbf{AX}$, musí mít tři řádky. Aby měl výsledek násobení tři sloupce, musí mít $\mathbf{X}$ tři sloupce.

Označme nyní ony neznámé sloupce $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$. Potom má $\mathbf{AX}$ sloupce $\mathbf{A}\vec{x}_1, \mathbf{A}\vec{x}_2, \mathbf{A}\vec{x}_3$. Označme navíc sloupce matice $\mathbf{B}$ jako $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Řešíme tedy trojici soustav s maticí $\mathbf{A}$ a pravými stranami $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Přece jen se tedy dostane ke slovu matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Dostáváme, že jádro matice $\mathbf{A}$ je generované např. vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a partiikulární řešení si můžeme v podstatě přecíst na pravé straně upravené soustavy.

Dohromady tedy řešení jednotlivých soustav vypadají takto:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &\in \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \vec{x}_2 &\in \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \vec{x}_3 &\in \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Nyní musíme s opatrností zrekonstruovat množinu řešení pro matici $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} \in \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Celou dobu jsme doteď interpretovali soustavy spíše v řeči jejích sloupečků než řádků, což je přístup, který pro vás byl patrně nový. Zkusme se teď vrátit k řádkům matice. Řádky pro nás bude ve skutečnosti mírně obtížnější interpretovat, neboť jsme se celou dobu zabývali právě sloupečkovými vektory. Bude se tedy hodit následující procedura:

8.21 Definice. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ definujeme matici **transponovanou** $\mathbf{A}^T \in \mathbb{F}^{n \times m}$ s prvky $[\mathbf{A}^T]_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$.

Měníme tedy roli řádků a sloupců. Speciálně můžeme opět vektory interpretovat jako matice s jedním sloupečkem. Pro $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ tedy symbol $\vec{x}^T$ znamená příslušný *řádkový vektor*, tj. matici s jedním řádkem a n sloupečky.

8.22 Věta. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Potom $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$.

Důkaz. Snadno vidíme, že je-li $\mathbf{A}$ v horním stupňovitém tvaru, musí platit $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$. Víme však, že každou matici lze upravit řádkovými úpravami do horního stupňovitého tvaru. Zbývá ukázat, že řádkové úpravy nemění dimenzi lineárního obalu řádků ani sloupečků. Pro sloupečky už jsme to zdůvodnili v důsledku 8.17. Pro řádky je zdůvodnění ve skutečnosti jednodušší, neboť snadno nahlédneme, že řádkové úpravy zachovávají přímo lineární obal řádků. $\square$

8.23 Důsledek. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Potom $\text{rank } \mathbf{A} \leq \min\{m, n\}$.

Důkaz. Víme, že $\text{im } \mathbf{A} \leq \mathbb{F}^m$, tedy $\text{rank } \mathbf{A} = \dim \text{im } \mathbf{A} \leq m$. Navíc $\text{im } \mathbf{A}^T \leq \mathbb{F}^n$, takže $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T \leq n$. $\square$

8.24 Cvičení. Dokažte výše uvedený důsledek pomocí věty o dimenzi jádra a obrazu.

8.25 Pozorování. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:

1. $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ má právě jedno řešení.
2. $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ má právě jedno řešení.
3. $\mathbf{A}$ je regulární.
4. $\text{rank } \mathbf{A} = n$.
5. $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce.
6. $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé řádky.

Důkaz. Ekvivalence všech bodů až na poslední by měla být již dávno jasná. Poslední bod plyne právě z rovnosti $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$. $\square$

8.3 Afinní prostory

Standardní geometrická interpretace soustavy lineárních rovnic je následující: Máme-li dvě rovnice o dvou neznámých, pak každá rovnice popisuje *přímku* a soustava jejich průnik, jímž je typicky (ale ne vždy) *bod*. Máme-li tři neznámé, každá rovnice reprezentuje *rovinu*. Jsou-li rovnice dvě, popisují průnik dvou rovin, jímž je typicky (ale ne vždy) *přímka*. Tři roviny pak mohou jednoznačně určovat bod. Pro více rovnic nám jaksi schází terminologie. Již jsme zavedli pojem *lineárního podprostoru*, který zde však nedostačuje, neboť množina řešení lineárních rovnic nemusí být lineární podprostor. Pojďme tuto terminologickou díru zaplnit:

8.26 Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Podmnožina $Q \subseteq L$ tvaru $Q = \vec{v} + V$, kde $\vec{v} \in L$ a $V \leq L$, se nazývá **afinní podprostor** (či **lineární varieta** uvnitř) L . Příslušný lineární podprostor V se nazývá jeho **zaměření**. Definujeme **dimenzi** afinního prostoru jako $\dim Q = \dim V$.

- Jestliže $\dim Q = 1$, nazýváme Q **přímka**.
- Jestliže $\dim Q = 2$, nazýváme Q **rovina**.
- Jestliže $\dim Q = \dim L - 1$, nazýváme Q **nadrovina**.

8.27 Pozorování. Zaměření afinního prostoru je určené jednoznačně jakožto $V = \{\vec{x} - \vec{y} \mid \vec{x}, \vec{y} \in Q\}$. Naopak roli *vektoru posunutí* $\vec{v}$ může hrát libovolný prvek Q .

Zápis $Q = \vec{v} + V$ zobecňuje *parametrický zápis* přímky a roviny, jenž znáte ze střední školy. Kromě toho znáte ze střední školy i pojem *obecné rovnice* přímky či roviny. Chtěli bychom tedy ukázat, že každý afinní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic. Všimněte si, že opačný směr jsme již dokázali: Frobeniova věta říká, že pakliže má soustava lineárních rovnic řešení, je tímto řešením afinní podprostor. Speciálně si všimněte, že každá jednotlivá lineární rovnice s n neznámými určuje nadrovinu v $\mathbb{F}^n$. Hledáme-li řešení soustavy, hledáme průnik těchto nadrovin.

8.28 Věta. Buď $\mathbb{F}$ těleso. Pro každý afinní podprostor $Q \subseteq \mathbb{F}^n$ dimenze k existuje $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ a $\vec{b} \in \mathbb{F}^m$, kde $m = n - k$, takové, že Q je množinou řešení $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

Důkaz. Označme $Q = \vec{v} + V$, kde $\vec{v} \in Q$ a tedy V je jeho zaměření. Necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je báze V . Doplňme tuto posloupnost na bázi $\mathbb{F}^n$ jako $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$. Necht je nyní $\mathbf{A}$ matice lineárního zobrazení $A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ působícího jako $\vec{x}_i \mapsto \vec{0}$, $\vec{y}_j \mapsto \vec{e}_j$. Z konstrukce tak platí, že $\ker \mathbf{A} = \ker A = V$. Nakonec položíme $\vec{b} = \mathbf{A}\vec{v}$. $\square$

8.29 Důsledek. Každý afinní podprostor dimenze k lineárního prostoru dimenze n je průnikem $m = n - k$ nadrovin.

Prakticky můžeme příslušnou soustavu získat jednodušeji trikem, který využívá následující vlastnost transpozice:

8.30 Věta. Buď $\mathbb{F}$ těleso, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{l \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Potom $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Důkaz. Snadno dokážeme přímo z definice maticového násobení:

$$[(\mathbf{AB})^T]_{ij} = [\mathbf{AB}]_{ji} = \sum_k \mathbf{A}_{jk} \mathbf{B}_{ki} = \sum_k [\mathbf{A}^T]_{kj} [\mathbf{B}^T]_{ik} = [\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T]_{ij}. \quad \square$$

8.31 Úloha. Napište rovinu v $\mathbb{R}^5$

$$Q = \vec{v} + V, \quad \text{kde} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

jako řešení soustavy lineárních rovnic.

Řešení. Daná rovina je afinním podprostorem $\mathbb{R}^5$ dimenze $\dim Q = 2$. Měli bychom tedy být schopni najít tři rovnice s pěti neznámými, jejichž řešením bude právě uvedená rovina Q . Musíme najít matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ a vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ takové, že $\ker \mathbf{A} = V$ a $\mathbf{A}\vec{v} = \vec{b}$. Matici najdeme z prvního požadavku a vektor $\vec{b}$ pak bude dáno prostým maticovým násobením.

Označme vektory generující V jako $\vec{x}_1, \vec{x}_2$. Podmínka $\ker \mathbf{A} = V$ lze ekvivalentně zapsat jako $\mathbf{A}\vec{x}_1 = \vec{0}$ a zároveň $\mathbf{A}\vec{x}_2 = \vec{0}$. Tyto dvě podmínky lze zapsat do jedné napíšeme-li vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ do sloupečků matice $\mathbf{X}$. Potom sloupečky $\mathbf{A}\mathbf{X}$ jsou vektory $\mathbf{A}\vec{x}_1$ a $\mathbf{A}\vec{x}_2$, takže naše podmínka je ekvivalentní podmínce $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{O}_{3 \times 2}$. Pozor však, že neznámou je nyní nikoliv matice $\mathbf{X}$, ale matice $\mathbf{A}$.

Nyní přijde trik: Obě strany rovnice transponujeme. Dostaneme tak ekvivalentní rovnici $\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{O}_{2 \times 3}$. Už máme rozmyšleno z příkladu 8.20, jak se taková maticová rovnice řeší: Sloupečky matice $\mathbf{A}^T$ (tedy řádky matice $\mathbf{A}$) budou řešením soustavy s maticí $\mathbf{X}^T$ a tentokrát nulovou pravou stranou. Řešíme tedy homogenní soustavu s maticí

$$\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matice je již v horním stupňovitém tvaru, a tak snadno píšeme řešení soustavy

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pokud budeme jako řádky matice $\mathbf{A}$ volit některé prvky z tohoto lineárního obalu, určitě budou splněny podmínky $\mathbf{A}\vec{x}_1 = \vec{0}$, $\mathbf{A}\vec{x}_2 = \vec{0}$, tedy $\ker A \supseteq V$. My však

chceme přímo rovnost. Chceme tedy, aby se defekt matice rovnal dvěma, neboli aby se hodnota rovnala třem. To zajistíme tak, že řádky zvolíme lineárně nezávislé – třeba právě po řadě ony tři generátory nalezené výše.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec určíme vektor $\vec{b}$ jako

$$\vec{b} = \mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme ještě závěrem, že řešení není určené jednoznačně. Do řádků matice $\mathbf{A}$ jsme mohli vzít jakoukoliv lineárně nezávislou trojici vektorů z příslušného lineárního obalu.

8.32 Cvičení. Pro matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ z příkladu 8.20 vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$. Návod: Použijte opět transponovací trik. Stačí vyřešit soustavu $\mathbf{A}^T \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$.

8.33 Příklad (Fibonacciho posloupnost). Jistě znáte Fibonacciho posloupnost, která začíná čísly $(0,)$ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... a každé další číslo se najde pomocí součtu dvou předchozích. Ne každý ví, že lze n -tý prvek této posloupnosti snadno vyjádřit vzorcem. Zde tento vzorec najdeme. Naší úlohou je tedy *vyřešit lineární rekurentní rovnici* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. K tomu by mohla lineární algebra pomoci. Jedná se vlastně o soustavu nekonečně mnoha rovnic s nekonečně mnoha neznámými

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 - a_0 &= 0, \\ a_3 - a_2 - a_1 &= 0, \\ a_4 - a_3 - a_2 &= 0, \\ a_5 - a_4 - a_3 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ony nekonečné počty nám budou výpočty trochu komplikovat, neboť jsme v této kapitole předpokládali konečné množství rovnic a neznámých, nicméně myšlenky budou velice podobné.

Místo matic soustavy (které jsou z definice konečné) budeme muset problém charakterizovat lineárním operátorem. Symbolem $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ budeme značit lineární prostor všech reálných posloupností číslovaných od nuly. Definujeme lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ vztahem $A(a_n)_{n \geq 0} = (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)_{n \geq 0}$. Jako cvičení ověřte, že je vskutku lineární. Hledáme všechny posloupnosti (a_n) takové, že $A(a_n) = 0$. Hledáme tedy jádro operátoru A .

Víme, že jádro je vždy lineární podprostor. V této kapitole se ukázala jako klíčová schopnost určit dimenzi jádra. Tu jsme určovali podle prvního bodu Frobeniovy

věty, která se opírala o větu o dimenzi jádra a obrazu. Ta sice platí i pro operátory na nekonečněrozměrných prostorech, ale nic nám o nich neříká, neboť pro jejich defekt dostaneme neurčitý výraz $\infty - \infty$.

V našem případě je klíčové pozorování, že každé řešení rekurence $(a_n) \in \ker A$ je již jednoznačně určeno hodnotami a_0 a a_1 . Napovídá nám to, že $\dim \ker A = 2$. Dokažme, že $\dim \ker A \leq 2$. Stačí vzít trojici $(a_n), (b_n), (c_n) \in \ker A$ a ukázat, že je nutně lineárně závislá. Označme $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ aritmetické vektory dané prvními dvěma prvky každé z posloupností. Ty jsou určité lineárně závislé, tedy existují α, β, γ ne všechny nulové takové, že $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Potom ale $\alpha(a_n) + \beta(b_n) + \gamma(c_n)$ má první dva prvky nulové. Jistě je to ale řešení rekurence (protože $\ker A$ je lineární podprostor), z té však snadno nahlédneme, že tato posloupnost musí mít všechny prvky nulové.

Nakonec zbývá nějaké dvě konkrétní lineárně nezávislá řešení najít. Pokud bychom se rekurentními rovnicemi zabývali systematicky, asi bychom nejdřív studovali ty *prvního řádu*, tj. tvaru $a_n = \lambda a_{n-1}$. Ty lze vyřešit snadno: $a_n = \lambda^n a_0$. Může nás tedy napadnout, zda by nějaké takové řešení nemohlo fungovat i zde. Dosazením odhadu $a_n = \lambda^n$ do rekurence dostaneme $\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0$. Vydělíme λ^n a obdržíme rovnici $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, jejímž řešením jsou čísla $(1 \pm \sqrt{5})/2$ známá též pod označením *zlatý řez*.

Tím jsme dokázali, že $\dim \ker A = 2$ a navíc jsme našli bázi $\ker A$ tvořenou posloupnostmi $((1 \pm \sqrt{5})/2)^n$. Z toho plyne, že libovolné řešení a_n zadané rekurence je tvaru

$$a_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Konkrétně Fibonacciho posloupnost je navíc určena počáteční podmínkou $a_0 = 0, a_1 = 1$, ze které snadno dovodíme, že $\alpha = 1/\sqrt{5} = -\beta$. Navíc si můžeme všimnout, že číslo $(1 - \sqrt{5})/2$ je v absolutní hodnotě menší než 1 a tím pádem posloupnost $|(1 - \sqrt{5})/2|^n$ klesá k nule a je speciálně celá menší než jedna. Navíc platí, že $1/\sqrt{5} < 1/2$. Dohromady to znamená, že n -tý člen Fibonacciho posloupnosti lze spočítat zaokrouhlením prvního členu ve vzorci na nejbližší celé číslo:

$$a_n = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rceil$$

Zde $[x] \in \mathbb{Z}$ pro $x \in \mathbb{R}$ značí právě operaci zaokrouhlení.

Dalším podobným příkladem aplikace lineární algebry je řešení lineárních diferenciálních rovnic. Ty lze rovněž zapsat ve tvaru $A\vec{x} = \vec{b}$ nebo tedy spíš $Af = g$, kde f, g jsou funkce a A je nějaký lineární diferenciální operátor na prostoru funkcí. Takovou rovnici lze interpretovat jako nekonečnou soustavu lineárních rovnic už jen s velkou dávkou představivosti, ovšem lineární algebru pro její řešení můžeme využít úplně stejným způsobem. Více se dozvíte na předmětu *Diferenciální rovnice a numerika* od doc. Habaly.

9 Jemný náhled do světa abstraktní algebry

V tento moment byste měli již rámcově chápat, o čem asi tak je lineární algebra. Zdaleka jsme nevychýřili všechna možná témata a v jejím zkoumání budeme zanedlouho pokračovat. Naskytá se však nyní vhodný moment seznámit se alespoň přehledově s dalšími algebraickými strukturami.

Tuto kapitolu není nutné umět ke zkoušce s výjimkou několika důležitých příkladů, jímž jsou pojmy *permutace*, *těleso* a příklady konečných těles $\mathbb{Z}_p$.

Algebraickou strukturou je množina M vybavená jednou nebo více operacemi, které mají jisté vlastnosti. Typickými požadovanými vlastnostmi je *asociativita*, *komutativita*, existence *neutrálního prvku* a podobně. My jsme se zatím setkali s jednou – poměrně komplikovanou – algebraickou strukturou – lineárním prostorem.

9.1 Definice. Dvojice $(G, \cdot)$, neprázdná množiny G a operace $\cdot : G \times G \rightarrow G$ splňující následující tři axiomy se nazývá **grupa**.

1. *Asociativní zákon*: pro každé $x, y, z \in G$ platí $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. *Existence neutrálního prvku*: existuje $e \in G$ takový, že pro každé $x \in G$ platí $x \cdot e = x = e \cdot x$.
3. *Existence inverzí*: pro každé $x \in G$ existuje **inverzní prvek** $y \in G$ takový, že $x \cdot y = e = y \cdot x$.

Grupa se nazývá **abelovská**,³⁷ platí-li navíc *komutativní zákon*: pro každé $x, y \in G$ je $x \cdot y = y \cdot x$.

9.2 Poznámka. Požadujeme-li z uvedených tří vlastností pouze asociativní zákon, příslušná struktura se nazývá *pologrupa*, požadujeme-li navíc existenci neutrálního prvku, dostaneme *monoid*.

9.3 Značení. Pro značení operace v grupě lze použít rozličných symbolů. Nejčastěji však symbol násobení $\cdot$ (který pak typicky, podobně jako u násobení, vynecháváme) nebo symbol sčítání $+$. Symbol $+$ se zpravidla používá pouze u abelovských grup. Používáme-li symbol sčítání, značíme neutrální prvek často symbolem 0 a nazýváme jej *nula*, inverznímu prvku x pak spíše říkáme *opačný prvek* a značíme ho $-x$. Píšeme rovněž $x - y$ namísto $x + (-y)$. Pokud používáme jakýkoliv jiný symbol, pak neutrální prvek značíme e a nazýváme jej *jednotka* a inverzi k x značíme x^{-1} . Není-li řečeno jinak, používáme vždy symbol pro násobení.

Grupy nyní můžeme zkoumat podobným způsobem jako lineární prostory. Máme méně axiomů, takže se dá čekat, že budeme mít méně bohatou teorii. Přesto se toho o grupách dá říci docela hodně. Následuje malá ochutnávka v podobě věty a definice, které by vám měly připomínat analogické výsledky a pojmy z lineární algebry.

9.4 Věta. V každé grupě existuje právě jeden neutrální prvek. Ke každému prvku existuje právě jedna inverze.

Důkaz. Cvičení. Dělat se to stejně jako u lineárních prostorů. □

³⁷ **Niels Henrik Abel**, 1802–1829, norský matematik, jeden z otců teorie grup, pomocí které vyřešil slavný stovky let otevřený problém, zda existuje vzorec (využívající jen základní operace) pro řešení polynomiálních rovnic vyššího než pátého stupně. Ve věku 26 let zemřel na tuberkulózu.

9.5 Definice. Budte G a H grupy. Zobrazení $\varphi: G \rightarrow H$ se nazývá **homomorfismus**, jestliže pro každé $x, y \in G$ platí $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$. Je-li zobrazení prosté, nazýváme jej **monomorfismus**, je-li na, nazýváme jej **epimorfismus** a je-li bijekcí, nazýváme jej **izomorfismus**. Je-li $G = H$, nazýváme takové zobrazení **endomorfismus** a je-li navíc bijekcí, jedná se o **automorfismus**.

9.6 Cvičení. Rozmyslete si, jak by se asi definoval pojem *podgrupy*.

9.7 Příklady.

- $(\mathbb{Z}, +)$ je abelovská grupa.
- $(\mathbb{R}, +)$ je abelovská grupa.
- $(\mathbb{F}, +)$ je abelovská grupa pro libovolné číselné těleso $\mathbb{F}$.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa.
- $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa pro libovolné číselné těleso $\mathbb{F}$.
- $(L, +)$ je abelovská grupa pro libovolný lineární prostor L .
- $(\mathbb{Z}, -)$ není grupa.
- $(\mathbb{N}, +)$ nebo $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nejsou grupy.

9.8 Příklad. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Pro $k \in \mathbb{Z}$ označme $[k] := \{k + in \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Zjevně $[k] = [k + n] = [k + 2n]$ a podobně. Ve skutečnosti jsme takto definovali právě n množin $[0], [1], \dots, [n-1]$. Každá další se shoduje právě s jednou z uvedených. Pro $j = 0, \dots, n-1$ obsahuje $[j]$ všechna čísla, která po dělení n dávají zbytek j . Nazýváme je proto **zbytkové třídy**. Označme množinu těchto množin $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$. Vzpomeňme, jak jsme počítali množiny vektorů. To zde půjde taky: Pro množiny $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ definujeme prostě $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Snadno ověříme, že

$$[i] + [j] = [i + j].$$

Tvrzení je, že $(\mathbb{Z}_n, +)$ je grupa. Ověřit to je snadné, neboť množina $\mathbb{Z}_n$ prostě převzeme příslušné vlastnosti od sčítání celých čísel. (Neutrálním prvkem je $[0]$, opačným k $[i]$ je $-[i] = [-i]$).

Nejedná se o žádnou konstrukci odtrženou od reality. Chceme-li formalizovat pozorování, že sečtením dvou lichých či dvou sudých čísel dostaneme číslo sudé, zatímco sečtením sudého a lichého číslo liché, popisujeme právě sčítání v grupě $(\mathbb{Z}_2, +)$. Hodiny na ciferníku počítají v grupě $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. Rotační symetrie n -úhelníku se skládají přesně podle zákona grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$. Rovněž lze pozorovat, že takto funguje násobení komplexních n -tých odmocnin z jedničky. Položíme-li $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\omega^j \mid j = 0, \dots, n-1\}$, kde $\omega = e^{2\pi i/n}$, pak $\omega^i \omega^j = \omega^{i+j}$ přičemž $\omega^i = \omega^j$ jestliže $[i] = [j]$. Speciálně dvoupvková množina $\{1, -1\} = \{(-1)^i \mid i = 0, 1\}$ je vzhledem k násobení grupou izomorfní se $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Kromě sčítání můžeme zbytkové třídy i násobit. Opět si všimněme, že $[i][j] = [ij]$. Ovšem nyní nebude obecně platit, že $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ je grupa. Snadno ověříme, že operace je asociativní a má jednotku $[1]$. Nicméně celá čísla nelze dělit, a tak nelze ani čekat, že by operace násobení na množině zbytkových tříd měla inverzi. Přesto platí, že $(\mathbb{Z}_n \setminus \{[0]\}, \cdot)$ může být grupou, a to právě tehdy když n je prvočíslo. Obecněji platí, že $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ je grupa, kde $\mathbb{Z}_n^\times = \{[i] \mid i \text{ nesoudělné s } n\}$. K důkazu bychom potřebovali nějaké základy teorie čísel, proto ho zde nebudeme provádět.

Výše uvedený příklad je základem pro teorii abelovských grup. Lze ukázat, že každá konečná abelovská grupa je *direktním součinem* grup $(\mathbb{Z}_n, +)$. Hlavní motivací pro studium teorie grup je však studium *symetrií*, které povede na příklady neabelovských grup. Symetrie *čehosi* je zobrazení na onom čemsi působící, které zachovává jakousi strukturu onoho čehosi. Jak vidíte, uvedená definice není tak precizní, jak bychom si představovali, proto se při studiu obecných vlastností symetrií vyplatí množiny symetrií axiomatizovat, což právě definice pojmu grupa dělá. Podstatné je pozorování, že symetrie lze vždy skládat, skládání symetrií je asociativní (jako skládání jakýchkoliv zobrazení), identické zobrazení je vždy symetrií a neutrálním prvkem vzhledem ke skládání, no a pokud nějaká operace zachovává danou strukturu, musí ji zachovávat i opačný proces, tedy inverzní zobrazení (symetrie nutně musejí být bijekce).

9.9 Příklady. Symetrie lineárního prostoru L jsou zobrazení $L \rightarrow L$ zachovávající jeho strukturu – izomorfismy. Příslušná grupa se nazývá *obecná lineární grupa* a značí $GL(L)$. Speciálně regulární matice $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ tvoří grupu $GL(n, \mathbb{F})$.

V příštích týdnech budeme dále obohacovat strukturu lineárního prostoru a budeme tak moci požadovat, aby se zachovávaly i další vlastnosti. Například lineární zobrazení zachovávající obsahy či objemy tvoří grupu. Pokud navíc zachovávají orientaci prostoru, nazývají se *speciální lineární transformace* a tvoří *speciální lineární grupu* $SL(L)$. Lineární zobrazení zachovávající délky a úhly se nazývají *ortogonální transformace* a tvoří *ortogonální grupu* (jedná se o rotace a zrcadlení). Pokud navíc zachovávají orientaci prostoru, tvoří *speciální ortogonální grupu* (jedná se o grupu všech možných rotací okolo počátku). Rovněž bychom mohli zkoumat symetrie afinních prostorů, kde je možné kromě lineárních transformací provádět i posunutí.

Nyní se zaměříme na ten úplně nejjednodušší případ tohoto ražení.

9.10 Definice. Buď M (konečná) množina. Bijekci $\pi: M \rightarrow M$ nazýváme **permutace** množiny M . Množinu všech permutací M značíme S_M . Speciálně množinu všech permutací množiny $M = \{1, \dots, n\}$ značíme S_n a nazýváme **symetrická grupa**.

9.11 Pozorování. Symetrická grupa permutací na množině M je grupa vzhledem k operaci skládání zobrazení. Vskutku: Složením dvou bijekcí vznikne bijekce. Již víme, že skládání zobrazení je asociativní operace. Jednotkovým prvkem je zjevně id_M . Inverzí k bijekci je opět bijekce.

9.12 Připomenutí. Počet prvků S_n je $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

9.13 Definice. Buď $\pi \in S_n$. **Inverze**³⁸ v permutaci π je dvojice čísel (i, j) takových, že $1 \leq i < j \leq n$ a $\pi(i) > \pi(j)$. Definujeme **znaménko** permutace π jako

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{\text{počet inverzí } \pi}.$$

Řekneme, že π je **sudá** permutace, jestliže má sudý počet inverzí, tj. $\text{sgn } \pi = 1$, a že je **lichá**, jestliže má lichý počet inverzí, tj. $\text{sgn } \pi = -1$.

³⁸ Tato terminologie může být poněkud matoucí. Budeme počítat *inverze v permutaci* ne *inverzi permutace*. To jsou dvě odlišné věci.

9.14 Definice. Permutace, která prohazuje dva prvky a žádné jiné nemění, se nazývá **transpozice**.

9.15 Pozorování. Každá transpozice je lichou permutací.

9.16 Věta. Pro $\pi, \sigma \in S_n$ platí $\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \sigma$.

Tvrzení nebudeme dokazovat. Znamená však, že složení dvou sudých nebo dvou lichých permutací je sudá permutace. Naopak složení liché a sudé permutace je lichá permutace. Jinými slovy znaménko permutace je homomorfismus z grupy S_n do grupy $(\{\pm 1\}, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_2, +)$.

Speciálně to znamená, že složením permutace s transpozicí obracíme její znaménko.

Rovněž můžeme ukázat následující:

9.17 Věta. Pro $\pi \in S_n$ platí $\operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi$.

Důkaz. Věta se dá dokázat různými způsoby. Například snadno nahlédneme, že (i, j) je inverze v π právě tehdy, když $(\pi(j), \pi(i))$ je inverze v π^{-1} . Počet inverzí a jejich parita se tedy shoduje.

Alternativně můžeme použít následující elegantní důkaz využívající předchozí věty: $1 = \operatorname{sgn} \operatorname{id} = \operatorname{sgn}(\pi\pi^{-1}) = \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \pi^{-1}$. Z toho už plyne $\operatorname{sgn} \pi^{-1} = (\operatorname{sgn} \pi)^{-1} = \operatorname{sgn} \pi$, kde poslední rovnost platí prostě proto, že znaménkem je vždy číslo ± 1 . $\square$

Výše uvedené pojmy využijeme v příští kapitole, kdy budeme definovat determinant matice. Nyní ještě zběžně k něčemu, co jsme tu na začátku vynechali:

9.18 Definice. Trojice $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ taková, že

- $(\mathbb{F}, +)$ je abelovská grupa, jejíž jednotku budeme značit 0,
- $(\mathbb{F}, \cdot)$ je abelovská grupa (jejíž jednotku budeme značit 1)
- a platí distributivní zákon: pro každé $a, b, c \in \mathbb{F}$ je $a(b + c) = ab + ac$

nazýváme **(komutativní) těleso**.

9.19 Poznámka. V lineární algebře, a tedy i v těchto poznámkách, se pod pojmem *těleso* vždy myslí komutativní těleso. V jiném kontextu lze však studovat i tělesa, kde násobení není komutativní. Anglicky se komutativnímu tělesu říká *field* zatímco nekomutativnímu *skew field* nebo *division ring*. Všechna dosud uvedená tvrzení, zejména definice lineárního prostoru, stále fungují, pokud zaměníme číselná tělesa za výše uvedená abstraktní tělesa (není-li uvedeno jinak).

9.20 Příklady.

- Každé číselné těleso je těleso.
- $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ je těleso pro každé prvočíslo p .
- Existují i další konečná tělesa, tzv. *Galoisova*³⁹ *tělesa*.

³⁹ **Évariste Galois**, 1811–1832, francouz, který se v patnácti letech nadchl pro matematiku, nezávisle na Abelovi objevil teorii grup, pomocí které rovněž dokázal charakterizovat podmínku řešitelnosti algebraických rovnic a položil základy tzv. *Galoisovy teorie*. Zemřel v souboji ve věku 21 let.

9.21 Poznámka. Při úvahách nad lineárními prostory nad konečnými tělesy musí být člověk trochu opatrnější, neb ho může zklamat vlastní intuice. Považujeme například za samozřejmé, že všechny netriviální lineární prostory mají nekonečně mnoho prvků, to u konečných těles pochopitelně není pravda – všechny konečněrozměrné lineární prostory budou konečné.

Zatímco pro polynomy nad číselnými tělesy pojmy *polynom* a *polynomiální funkce* v podstatě splývaly, nad konečnými tělesy tomu tak není. Funkcí $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ totiž bude konečně mnoho a speciálně tak i polynomiálních funkcí bude konečně mnoho. Extrémní situace bývá u $\mathbb{Z}_2$, kde snadno ověříte, že $x^i = x$ pro libovolné $x \in \mathbb{Z}_2$ a $i \in \mathbb{N}$. Naopak polynomů je stále nekonečně mnoho: monomy $1, x, x^2, x^3, \dots$ považujeme z definice za rozdílné a budou tedy opět tvořit lineárně nezávislou posloupnost.

Rozmýšlení, zda je nějaká funkce lineární nemusí být tak přímočaré. Chcete-li ukázat, že zadaná funkce není lineární, je zvlášť dobré zkusit najít konkrétní protipříklad. Například funkce $f: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ zobrazující $f(x) = x^2$ je lineární. Vskutku: Platí totiž přece $f(x) = x^2 = x$. Obecně v $\mathbb{Z}_p$ bude platit, že $(a+b)^p = a^p + b^p$, a tak zde budou mít častěji pravdu vaši matematicky méně pečliví kamarádi, kteří se takovou rovnost neostýchají napsat, zatímco vy pravdu mít nebudete, pokud budete tvrdit, že $x \mapsto x^p$ zjevně není lineární (opět bude platit $x^p = x$).

Běžné jsou struktury se dvěma operacemi, kde druhá nemá inverzi (není tedy grupou, ale jen monoidem). Takovým se říká *okruh*. Máme třeba okruh polynomů nad tělesem či libovolným okruhem $\mathbb{F}[x]$ či $\mathbb{Z}[x]$. Rovněž čtvercové matice tvoří (nekomutativní) okruh $\mathbb{F}^{n \times n}$ a opět k tomu nepotřebujeme, aby jejich prvky byly z tělesa, čili $\mathbb{Z}^{n \times n}$ je taky okruh. Ale pokud zároveň chceme, aby se jednalo o lineární prostor, je použití tělesa nutné. Nakonec pro zajímavost ještě jedna definice:

9.22 Definice. Algebra je lineární prostor A nad tělesem $\mathbb{F}$ vybavený operací $\cdot: A \times A \rightarrow A$, jenž je lineární v obou argumentech, tj. pro každé $x, y, z \in A$ a $\alpha \in \mathbb{F}$ je $x(y+z) = xy + xz$, $x(\alpha y) = \alpha(xy)$, $(x+y)z = xz + yz$, $(\alpha x)y = \alpha(xy)$.

9.23 Příklady.

- V rámci vět 6.18, 6.30, 6.32, 6.33 jsme dokázali, že pro libovolný lineární prostor V nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina operátorů $\text{Lin}(V)$ (nekomutativní) algebrou.
- Speciálně je pro libovolné těleso $\mathbb{F}$ a číslo $n \in \mathbb{N}$ množina matic $\mathbb{F}^{n \times n}$ algebrou.
- Naopak obecná lineární grupa regulárních matic ani její výše zmíněné podgrupy algebru netvoří, neboť nejsou netvoří lineární prostor.
- Pro libovolnou množinu A a těleso $\mathbb{F}$ je množina funkcí $\mathbb{F}^A = \{f: A \rightarrow \mathbb{F}\}$ komutativní algebrou nad $\mathbb{F}$.

10 Determinant

Na úplně první přednášce (kterou jsem tu byl líný sepsat) jsme jako motivaci našeho studia uvedli následující výsledek:

10.1 Věta. Budte $a, b \in \mathbb{R}$. Rovnice $ax = b$ má právě jedno řešení $x \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $a \neq 0$. Tím řešením je číslo $a = b/a$.

Ve speciálním případě jedné lineární rovnice s jednou proměnnou jsme byli explicitně vzorečkem schopni charakterizovat jednoznačnou řešitelnost rovnice (invertibilitu čísla a) a následně opět vzorečkem napsat řešení. Charakterizaci jednoznačnosti řešení a algoritmus k jeho nalezení jsme formulovali v kapitole 8. Nicméně nejedná se o žádný vzorec, který by stačilo natukat do kalkulačky. O ten se pokusíme v této kapitole.

Po zbytek poznámek bude $\mathbb{F}$ nějaké pevně zvolené těleso, abychom tento předpoklad nemuseli stále opakovat. Celá tato kapitola se bude týkat čtvercových matic.

10.2 Připomenutí. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se nazývá *regulární*, jestliže je zobrazení $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ dané maticovým násobením $\vec{x} \mapsto \mathbf{A}\vec{x}$ bijektivní.

10.3 Definice. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se nazývá *singulární*, jestliže není regulární.

10.4 Příklad. Uvažujme obecnou soustavu dvou rovnic a dvou neznámých, tedy matici 2×2 a dvousloužkový sloupec pravých stran

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Pokusme se najít explicitní podmínku, která charakterizuje, kdy je $\mathbf{A}$ regulární, a následně vzorec pro nalezení jednoznačného řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Mimo to se ještě můžeme pokusit o nalezení explicitního vzorce pro inverzi matice $\mathbf{A}$. Předpokládejme na chvíli, že $a \neq 0$. Pak můžeme provést Gaussovu eliminaci následujícím způsobem:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right)$$

Vidíme tedy, že (za předpokladu $a \neq 0$) matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $ad - bc \neq 0$. Číslu $\det \mathbf{A} := ad - bc$ budeme říkat *determinant* matice $\mathbf{A}$. Upravujeme dále Gaussovou–Jordanovou eliminací

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 + \frac{bc}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy za předpokladu $a \neq 0$ a $\det \mathbf{A} \neq 0$ výsledek $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Snadno ověříme zkouškou, že výsledek je správný i po vypuštění předpokladu $a \neq 0$. Nakonec snadno ověříme, že pro $a = 0$ a $ad + bc = 0$ je matice singulární (máme totiž $bc = 0$, tedy $b = 0$ nebo $c = 0$, tedy první řádek nebo sloupec je nulový). Charakterizace regularity pomocí determinantu tedy rovněž platí i po vypuštění předpokladu $a \neq 0$.

Nakonec ještě nalezneme vzorec pro ono jednoznačné řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} de - bf \\ af - ce \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že prvky vektoru dostaneme spočtením determinantu matice $\mathbf{A}$, kde nahradíme první resp. druhý sloupeček sloupcem pravých stran.

10.1 Definice a výpočet pomocí rozvoje

10.5 Definice. Determinant matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je skalár

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \mathbf{A}_{2\pi(2)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n)} \in \mathbb{F}.$$

10.6 Pozorování. Snadno rozmyslíme, že platí

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \mathbf{A}_{2\pi(2)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{\pi(1)1} \mathbf{A}_{\pi(2)2} \cdots \mathbf{A}_{\pi(n)n} = \det \mathbf{A}^T \end{aligned}$$

10.7 Značení. Determinant matice s konkrétními prvky se často značí svislými čarami místo závorek:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

10.8 Příklad. Pro $n = 2$ opravdu dostaneme vzorec z příkladu 10.4. Existují totiž jen dvě permutace dvouprvkové množiny, a sice identita $\varepsilon: 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$ a transpozice $\tau: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$. Dostáváme tedy

$$\det \mathbf{A} = \operatorname{sgn} \varepsilon \mathbf{A}_{1\varepsilon(1)} \mathbf{A}_{2\varepsilon(2)} + \operatorname{sgn} \tau \mathbf{A}_{1\tau(1)} \mathbf{A}_{2\tau(2)} = \mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{21}.$$

Pro $n = 3$ máme celkem šest permutací. Dostáváme

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gb f - ceg - fha - ibd.$$

Pro větší rozměry matic se nabízí počítat determinant rekursivně. V definici determinantu je možné seskupit všechny permutace zobrazující $n \mapsto 1$ a vytknout $\mathbf{A}_{n1}$, dále seskupit všechny permutace zobrazující $n \mapsto 2$ a vytknout $\mathbf{A}_{n2}$ a tak dále:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{n1} \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(n) = 1}} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{n-1,\pi(n-1)} \\ &\quad + \cdots + \mathbf{A}_{nn} \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(n) = n}} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{n-1,\pi(n-1)} \end{aligned}$$

Suma, která zbude po vytknutí opět vypadá jako determinant. Akorát s tím, že v něm vždy vynecháváme n -tý řádek a $\pi(n)$ -tý sloupec.

10.9 Definice. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. **Algebraický doplněk** pozice (i, j) v matici $\mathbf{A}$ je číslo $(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}^{(i,j)}$, kde $\mathbf{A}^{(i,j)}$ je matice, která vznikne z $\mathbf{A}$ odstraněním i -tého řádku a j -tého sloupce.

10.10 Věta (Rozvoj determinantu podle řádku či sloupce). Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a označme D_{ij} algebraický doplněk pozice (i, j) v matici $\mathbf{A}$. Potom pro každé $k = 1, \dots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n D_{ik} \mathbf{A}_{ik} = \sum_{i=1}^n D_{ki} \mathbf{A}_{ki}.$$

Prvnímu vztahu říkáme *rozvoj podle k -tého sloupce* a druhému *rozvoj podle k -tého řádku*.

Důkaz. Naznačíme důkaz první rovnosti pro $k = n$. Rovnost pro obecné k by se dokazovala obdobně, případně bychom mohli využít prohazování sloupců ve větě 10.16. Rozvoj podle řádku dostaneme transpozicí s využitím Pozorování 10.6.

Upravíme tedy

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{in} D_{in} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{in} (-1)^{n+i} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\pi(1)} \cdots \mathbf{A}_{i-1, \pi(i-1)} \mathbf{A}_{i+1\pi(i)} \cdots \mathbf{A}_{n\pi(n-1)}.$$

Abychom ukázali, že výsledek již odpovídá definici determinantu matice $\mathbf{A}$, musíme si uvědomit následující. Pro permutaci $\pi \in S_{n-1}$ a číslo $i = 1, \dots, n$ můžeme definovat permutaci $\tilde{\pi} \in S_n$ takto:

$$\tilde{\pi}(j) = \begin{cases} \pi(j) & \text{pokud } j < i, \\ n & \text{pokud } j = i, \\ \pi(j-1) & \text{pokud } j > i. \end{cases}$$

Pak je totiž i -tý sčítanec sumy výše přesně tvaru

$$\sum_{\pi \in S_{n-1}} (-1)^{n+i} \operatorname{sgn} \pi \mathbf{A}_{1\tilde{\pi}(1)} \cdots \mathbf{A}_{i-1, \tilde{\pi}(i-1)} \mathbf{A}_{i\tilde{\pi}(i)} \mathbf{A}_{i+1\tilde{\pi}(i+1)} \cdots \mathbf{A}_{n\tilde{\pi}(n)}.$$

Platí $\operatorname{sgn} \tilde{\pi} = (-1)^{n-i} \operatorname{sgn} \pi$, neboť π můžeme považovat za permutaci v S_n , která zobrazuje $n \mapsto n$, a pak můžeme $\tilde{\pi}$ dostat z π složením s $n-i$ transpozicemi (které jsou vždy liché). Následně je potřeba rozmyslet, že různým dvojicím (π, i) odpovídají různé permutace $\tilde{\pi}$ a že se takto vyčerpají všechny prvky S_n . $\square$

Všimněme si nyní jedné zvláštnosti: Všechno v lineární algebře dosud bylo lineární. Determinant, jakožto zobrazení $\mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$, *není lineární*! Snadno se přesvědčíte dosazením do definice determinantu, že $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A}$, kde n je rozměr matice $\mathbf{A}$. Než to prohlásíme za skandální a všechny papíry se slovem determinant rituálně spálíme, zkusme se podívat na determinant z jiného úhlu pohledu:

10.11 Definice. Buďte V a W lineární prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $f: \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n \times} \rightarrow W$ se nazývá **multilineární**⁴⁰, jestliže pro každé $i = 1, \dots, n$

a pro každou $(n-1)$ -tici $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n \in V$ platí, že zobrazení $\hat{f}: V \rightarrow W$ definované jako

$$\hat{f}(\vec{x}) = f(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{x}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)$$

je lineární.

⁴⁰ Konkrétně n -lineární. Speciálně pro $n = 2$ takové zobrazení nazýváme *bilineární*.

10.12 Věta. Zobrazení $\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ definované vztahem

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \mapsto \det(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_n)$$

je multilineární.

Důkaz. Zkombinuujeme větu 10.10 o rozvoji determinantu s tvrzením 6.6. $\square$

Determinant matice tedy lineárně závisí na sloupečcích dané matice. Použitím věty na transponovanou matici analogicky získáme tvrzení, že determinant je lineární i v závislosti na řádcích matice.

10.13 Úloha. Spočítejte rozvojem determinant následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Dobrou strategií, který řádek či sloupec vybrat, je vybírat takový, kde je co nejméně nenulových prvků. Zde například v prvním řádku máme nenulovou pouze sedmičku na konci, dostaneme tak

$$\det \mathbf{A} = 0 + 0 + 0 + 7(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Dále se jeví jako vhodný opět první řádek nebo druhý sloupeček. Vezměme pro změnu druhý sloupec:

$$\det \mathbf{A} = -7 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7 \left(0 + 0 + 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

Zvolíme-li závěrem třeba druhý sloupeček, dostáváme okamžitě

$$\det \mathbf{A} = (-7)(-5)1(-2) = -70.$$

K totožnému výsledku můžeme dojít snadno i přímo z definice, pokud si všimneme, že všechny příspěvky budou nulové kromě permutace $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 2$ přičemž znaménko této permutace je $+1$.

Ve výše uvedeném příkladě jsme si všimli, že determinant některých typů matic se počítá zvlášť snadno.

10.2 Výpočet Gaussovou eliminací

10.14 Definice. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je v **horním trojúhelníkovém tvaru**, jestliže $\mathbf{A}_{ij} = 0$ pro každé $i > j$.

10.15 Pozorování. Necht $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je v horním trojúhelníkovém tvaru.

- $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když má všechny diagonální prvky $\mathbf{A}_{ii}$ nenulové.
- Determinant matice je roven součinu všech diagonálních prvků $\det \mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} \cdots \mathbf{A}_{nn}$ (v celé sumě bude jediný nenulový příspěvek od identické permutace $\text{id} \in S_n$).
- Platí tedy, že $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

To nám něco připomíná – hledat řešení soustav lineárních rovnic jsme se taky nejdřív naučili pro speciální tvar matice. Všimněte si ještě, že matice v horním stupňovitém tvaru je automaticky horní trojúhelníková, takže kdyby se nám třeba podařilo ukázat, že Gaussova eliminace nemění determinant, mohli bychom ji k výpočtu determinantu použít.

10.16 Věta. Uvažujme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a necht $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikne z $\mathbf{A}$ některou z elementárních řádkových úprav.

1. Pokud $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla prohozením dvou řádků, pak $\det \tilde{\mathbf{A}} = -\det \mathbf{A}$.
2. Pokud $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla vynásobením nějakého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{F}$, pak $\det \tilde{\mathbf{A}} = \alpha \det \mathbf{A}$.
3. Pokud $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikla přičtením násobku nějakého řádku k jinému, pak $\det \tilde{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}$.

Téhož výsledku dostaneme použitím analogických úprav se sloupcečky.

Důkaz. Větu budeme dokazovat pro sloupcové úpravy. Analogie pro řádkové plyne z pozorování 10.6.

První bod snadno nahlédneme přímo z definice determinantu. Necht máme $\tilde{\mathbf{A}}_{ij} = \mathbf{A}_{i\tau(j)}$ pro nějakou transpozici $\tau \in S_n$. Potom

$$\begin{aligned} \det \tilde{\mathbf{A}} &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi \tilde{\mathbf{A}}_{1\pi(1)} \cdots \tilde{\mathbf{A}}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi \mathbf{A}_{1\tau(\pi(1))} \cdots \mathbf{A}_{n\tau(\pi(n))} \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\tau \circ \pi) \mathbf{A}_{1\tau(\pi(1))} \cdots \mathbf{A}_{n\tau(\pi(n))} \\ &= - \sum_{\tilde{\pi} \in S_n} \text{sgn } \tilde{\pi} \mathbf{A}_{1\tilde{\pi}(1)} \cdots \mathbf{A}_{n\tilde{\pi}(n)} = -\det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Druhý bod je důsledkem multilinearity determinantu. (Ale rovněž je zřejmý přímo z definice.)

Pro třetí bod označme $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sloupce matice $\mathbf{A}$. Necht matice $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikne z $\mathbf{A}$ přičtením α -násobku k -tého sloupce k l -tému. Její sloupce jsou tedy totožné až na l -tý, kterým je $\alpha \vec{a}_k + \vec{a}_l$. Nyní z multilinearity determinantu plyne, že

$$\begin{aligned} \det \tilde{\mathbf{A}} &= \det(\vec{a}_1 \cdots \alpha \vec{a}_k + \vec{a}_l \cdots \vec{a}_k \cdots \vec{a}_n) \\ &= \alpha \det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_k \cdots \vec{a}_k \cdots \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_l \cdots \vec{a}_k \cdots \vec{a}_n). \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že determinant první matice, ve které se sloupec $\vec{a}_k$ vyskytuje dvakrát, je nulový. Pokud má jakákoliv matice $\mathbf{B}$ dva stejné sloupce, pak tyto sloupcečky

můžeme prohodit aniž bychom matici změnili. Z prvního bodu však tím pádem plyne, že $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{B}$, tedy $\det \mathbf{B} = 0$. $\square$

10.17 Úloha. Nalezněme determinant následující matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení. Jeden způsob je provést Gaussovu eliminaci (pamatovat si počet prohození řádků) a determinant si následně přepočítat ve výsledném tvaru jako součin diagonálních prvků (s opačným znaménkem, pokud jsme řádky prohazovali v lichém počtu případů). Připomeňme, že Gaussova eliminace tak, jak jsme ji zformulovali jako algoritmus 8.10 vůbec neprovádí řádkovou úpravu č. 2, tedy determinant se až na znaménko vážně vůbec nemění. Pokud bychom tuto úpravu provádět chtěli, měli bychom být opatrní.

Při výpočtu determinantu však můžeme často s výhodou využít faktu, že krom řádkových úprav můžeme provádět i sloupcové. Tyto úpravy můžeme dále kombinovat s rozvojem podle řádku či sloupce. V tomto konkrétním případě si třeba můžeme všimnout, že druhý a třetí sloupec vypadají až na násobek velmi podobně. Přičtením dvojnásobku třetího ke druhému vynulujeme skoro všechny prvky a můžeme použít rozvoj.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Dále bychom mohli počítat z definice či například využít Gaussovu eliminaci

$$\begin{aligned} -7 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -7 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-17) = -119. \end{aligned}$$

10.18 Věta. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz. Každou matici lze podle věty 8.9 sledem elementárních řádkových úprav (Gaussovou eliminací) upravit na horní stupňovitý tvar. Tyto úpravy podle důsledku 8.17 zachovávají regularitu/singularitu matice a podle výše uvedené věty 10.16 zachovávají nulovost/nenulovost determinantu. $\square$

10.19 Věta. Pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ platí $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

Řečí abstraktní algebry: Determinant je homomorfismus z grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ regulárních matic (nebo monoidu $\mathbb{F}^{n \times n}$ všech matic) do grupy $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ (nebo monoidu $(\mathbb{F}, \cdot)$). Nejedná se však o homomorfismus algeber, neboť není lineární.

Důkaz. Důkaz jen naznačíme. Jako lemma bychom dokázali, že determinant transformačních matic $\mathbf{T}$ zprostředkujících elementární řádkové úpravy z lemmatu 8.15 jsou po řadě -1 , α a 1 . Ve spojení s větou 10.16 z toho plyne, že $\det(\mathbf{TB}) = \det \mathbf{T} \det \mathbf{B}$ pro libovolnou z těchto speciálních matic. V důkazu věty 8.16 jsme však ukázali, že libovolná regulární matice je součinem těchto speciálních matic, které sprostředkují elementární řádkové úpravy. Indukcí bychom tak dokázali, že $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ pro libovolnou regulární matici $\mathbf{A}$. Nakonec v případě, že $\mathbf{A}$ je singulární, pak podle věty 10.18 má nulový determinant. Součin $\mathbf{AB}$ bude určitě taky singulární (příslušné zobrazení určitě nebude na), a tak $\det(\mathbf{AB}) = 0$. Rovnost tedy platí i v případě, že $\mathbf{A}$ je singulární. $\square$

10.20 Věta. Pro regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ platí $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$.

Důkaz.

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} \quad \square$$

10.21 Poznámka. Věta a její důkaz nám velmi připomínají větu 9.17. Že se oba výsledky dají dokázat stejně není náhoda. Jde totiž o instance obecné věty v teorii grup. Pakliže zobrazení $\varphi: G \rightarrow H$ splňuje $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, pak musí platit $\varphi(e_G) = e_H$ (kde e_G a e_H značí jednotky v grupách G a H) a rovněž $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Zkuste jako cvičení dokázat druhou vlastnost (za předpokladu, že platí ta první).

10.22 Poznámka (Geometrický význam determinantu). Uvažujme obecnou horní trojúhelníkovou matici 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme navíc, že $a, c > 0$. Potom jednotlivé sloupce matice určují rovnoběžník s hranou délky a a výškou c . Obsah tohoto rovnoběžníku bude tedy $ac = \det \mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}$ prostřednictvím maticového násobení zobrazuje jednotkový čtverec daný vektory kanonické báze právě na rovnoběžník určený sloupce matice. Čtverec se tedy působením zobrazení potenciálně zkosí a zároveň se jeho obsah zvětší $\det \mathbf{A}$ -krát.

Snadno rozmyslíme, že libovolnou dvojici vektorů lze v $\mathbb{R}^2$ natočit tak, že první z nich je rovnoběžný s osou x , a tedy dostaneme přímo předepsaný tvar. Rovněž snadno spočítáme, že matice otočení o úhel α má determinant

$$\det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

V důsledku věty 10.19 tedy uvedené pozorování až na znaménko platí pro libovolnou matici $\mathbf{A}$. Otočit totiž vždy můžeme tak, že první vektor je dokonce uvnitř kladné poloosy x (má první souřadnici $a \geq 0$), ovšem druhý vektor může mít druhou souřadnici c klidně zápornou (či nulovou). V případě, že $c < 0$, dostaneme determinant záporný. Interpretaci to má takovou, že příslušné lineární zobrazení *mění orientaci prostoru*. Pakliže znázorníme vektory kanonické báze tak, že od prvního k druhému vede nejkratší cesta otočením doleva, můžeme se pak ptát, zda vede nejkratší cesta

od prvního ke druhému sloupečku matice $\mathbf{A}$ rovněž otočením doleva (pak zobrazení zachovává orientaci a determinant bude kladný) nebo otočením doprava (pak převrací orientaci a determinant bude záporný).

Analogicky si můžeme situaci rozmyslet v $\mathbb{R}^3$. Zde trojice vektorů určuje rovnoběžnostěň. Bude-li trojice v horním trojúhelníkovém tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix},$$

pak první dva vektory určují v rovině xy rovnoběžník s hranou a a výškou c , který pak určuje podstavu příslušného rovnoběžnostěnu s výškou f (za předpokladu, že $a, c, f > 0$). Snadno rozmyslíme, že rotace kolem osy x , y a z mají matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

z nichž každá má determinant roven jedné. A tak můžeme každou matici rotací upravit na horní trojúhelníkový tvar s $a, c \geq 0$. Pakliže vektory kanonické báze načrtneme podle „pravidla pravé ruky“, pak matice $\mathbf{A}$ zachovává orientaci, jestliže i její sloupceky po řadě odpovídají pravidlu pravé ruky.

Abychom něco takového dokázali obecně, museli bychom nejprve definovat, co je to *rotace*. K tomu se dostaneme až později.

10.23 Poznámka. Věty 10.19 a 10.20 rovněž umožňuje definovat pojem *determinant* pro operátory na libovolném konečněrozměrném prostoru. Pro $A \in \text{Lin}(V)$, $\dim V < \infty$ můžeme vybrat libovolnou bázi $\mathcal{X}$ prostoru V a definovat $\det A = \det[A]_{\mathcal{X}}$. Je však nutné dokázat, že je uvedená definice *dobrá*, tj. že nezávisí na volbě báze $\mathcal{X}$. Nechť je tedy $\mathcal{Y}$ jiná báze V . Potom

$$\det[A]_{\mathcal{Y}} = \det([\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}[A]_{\mathcal{X}}[\text{id}]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}}) = \det[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} \det[A]_{\mathcal{X}} \det[\text{id}]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}},$$

což je rovno $\det[A]_{\mathcal{X}}$, neboť můžeme využít faktu $[\text{id}]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}} = ([\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}})^{-1}$ (viz poznámku 7.11), a tedy podle věty 10.20 $\det[\text{id}]_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}} = (\det[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}})^{-1}$.

10.3 Cramerovo pravidlo

Vraťme se nyní k otázce, zda by nešel najít vzoreček přímo na výpočet inverzní matice nebo na výpočet řešení soustavy.

10.24 Definice. Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Definujeme matici $\text{adj } \mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ **adjungovanou** k $\mathbf{A}$ tak, že v i -tém řádku a j -tém sloupci bude mít algebraický doplněk pozice (j, i) v matici $\mathbf{A}$.

10.25 Lemma. Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ a $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$. Nechť matice $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ náhradou i -tého sloupce vektorem $\vec{b}$. Potom

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^n D_{ki} b_k,$$

kde D_{ki} je algebraický doplněk pozice (k, i) v matici $\mathbf{A}$.

Důkaz. Číslo D_{ki} je zároveň algebraickým doplnkem pozice (k, i) v matici $\tilde{\mathbf{A}}$, čili uvedený vzorec je prostě rozvojem determinantu matice $\tilde{\mathbf{A}}$ podle i -tého sloupce. $\square$

10.26 Věta. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je regulární. Potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

Důkaz. Označíme-li $\mathbf{B}$ matici na pravé straně dokazované rovnosti, stačí ukázat, že $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$. Vyjádřeme tedy součin $\operatorname{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A}$. Nechť D_{ki} značí algebraický doplněk matice $\mathbf{A}$ na pozici (k, i) .

$$[\operatorname{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^n [\operatorname{adj}(\mathbf{A})]_{ik} \mathbf{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n D_{ki} \mathbf{A}_{kj}.$$

V případě, že $i = j$, jsme dostali rozvoj determinantu $\mathbf{A}$ podle i -tého řádku. V případě, že $i \neq j$, jsme dostali podle předchozího lemmatu determinant matice $\tilde{\mathbf{A}}$, která vznikla z $\mathbf{A}$ náhradou i -tého sloupce j -tým sloupcem. To ale znamená, že $\tilde{\mathbf{A}}$ má dva stejné sloupce, je tedy singulární a má nulový determinant. Dohromady jsme dostali $\operatorname{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{E}$. $\square$

10.27 Věta (Cramerovo⁴¹ pravidlo). Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je regulární matice, $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$. Pro $i = 1, \dots, n$ označme $\mathbf{A}^{(i)} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matici vzniklou z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i -tého sloupce vektorem $\vec{b}$. Potom i -tá složka jednoznačného řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ lze vypočítat jako

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}^{(i)}}{\det \mathbf{A}}.$$

Důkaz. Můžeme vyjádřit $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$. K vyjádření inverzní matice použijeme matici adjungovanou. Označme D_{ij} algebraický doplněk pozice (i, j) v matici $\mathbf{A}$, čímž $[\operatorname{adj}(\mathbf{A})]_{ij} = D_{ji}$. Máme tedy

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_k D_{ki} b_k,$$

což je podle lemmatu výše přesně rovno kýženému podílu. $\square$

10.28 Poznámka. Počítání determinantu matice $n \times n$ z definice nebo rekurzivně použitím rozvoje vyžaduje sečíst $n!$ členů, kde každý vznikne vynásobením n čísel. Oproti tomu lze ukázat, že Gaussova eliminace vyžaduje řádově pouze n^3 operací (viz předmět DRN). Gaussova eliminace je tedy nejefektivnějším způsobem pro počítání determinantu, který známe.

Všimněte si, že Cramerovo pravidlo vyžaduje na výpočet být jen jediné složky řešení spočítat hned dva determinanty. Ve většině případů je tedy nejlepší prostě Gaussovou eliminací spočítat rovnou celé řešení. (Alternativně existují iterativní numerické metody, opět viz DRN.) Cramerovo pravidlo tedy nemá příliš velké využití až na velmi specifické případy.

⁴¹ **Gabriel Cramer**, 1704–1752, švýcarský matematik

Podobně je to s výpočtem inverzní matice pomocí matice adjungované. Pro matice 2×2 dostáváme velmi šikovný vzorec

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

který jsme odvodili již na začátku kapitoly. Pro větší matice se spíše hodí eliminace.

Uvedené vzorce mají jistý teoretický význam – dovolují nám vyjádřit inverzní matici či složky řešení lineární soustavy zcela obecně aniž bychom znali konkrétní složky dané matice (a mohli tak použít algoritmický postup).

Na pomezí konkrétních soustav a zcela obecných soustav jsou soustavy s parametry. Sečíst dva výrazy s parametry totiž už vyžaduje víc než jednu operaci, a tak Gaussova eliminace zpravidla není tak rychlá. Navíc si musíme dávat pozor, aby naše úpravy byly opravdu ekvivalentní (abychom například soustavu nenásobili nulovým číslem), což často vede k tomu, že se řešení eliminací nepříjemně větví. V takových případech může být Cramerova věta užitečným pomocníkem. Avšak musíme mít na paměti, že funguje pouze pro soustavy s regulární maticí.

Pokud je parametr v soustavě pouze jeden, je často Gaussova eliminace stále tou nejefektivnější volbou. Na druhou stranu při počítání výhradně Gaussovou eliminací musí být člověk trochu pečlivější. Výběr metody tedy závisí na osobní preferenci každého.

10.29 Úloha. Najděte všechna řešení následující soustavy v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array} \right).$$

Řešení použitím Cramerova pravidla: Nejprve je nutné spočítat determinant matice soustavy

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 3\lambda + 2$$

Dále musíme rozmyslet, za jakých podmínek je matice regulární, a tedy kdy vůbec můžeme použít Cramerovo pravidlo. Dosazením $\lambda = 1$ do determinantu zjistíme, že v tomto případě je determinant nulový a matice je singulární. Pomocí tohoto odhadu můžeme dále rozložit $\det \mathbf{A} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

Za předpokladu $\lambda \neq 1, 2$ tedy můžeme použít Cramerovu větu. Ta říká, že máme po řadě jednotlivé sloupce nahradit sloupcem pravých stran a spočítat determinant.

Počítáme tedy

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ \lambda & \lambda & 1 & \\ \lambda^3 & 1 & \lambda & \end{array} \right| &= -\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1) \\ \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \\ 1 & \lambda & 1 & \\ 1 & \lambda^3 & \lambda & \end{array} \right| &= -\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(1 - \lambda^2) \\ \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & \\ 1 & \lambda & \lambda & \\ 1 & 1 & \lambda^3 & \end{array} \right| &= \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

A jediným řešením soustavy je tedy vektor

$$\frac{1}{\lambda - 2} \begin{pmatrix} -\lambda^2 - \lambda - 1 \\ 1 - \lambda^2 \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Tím však práce není u konce. Musíme soustavu vyřešit pro všechny hodnoty parametru. Dosazením $\lambda = 1$ získáme soustavu bez parametru, kterou vyřešíme eliminací

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Řešení: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dosazením $\lambda = -2$ získáme opět soustavu bez parametru, kterou můžeme vyřešit eliminací:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right)$$

Tato soustava evidentně nemá řešení.

Řešení pouze Gaussovou eliminací: Eliminujeme soustavu s parametrem. Při úpravách se snažíme za každou cenu vyhnout operaci násobení řádku výrazem s parametrem, neboť v takovém případě bychom museli zvlášť ošetřit případ, kdy je daný výraz nulový. U naší soustavy se nám podaří vyhnout se takovým úpravám zcela:⁴²

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 & \lambda^3 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 & \lambda^3 - \lambda \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & -\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda + 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

⁴² Ve skutečnosti nemusíme být tak dogmatictí. Pokud si po druhé úpravě všimneme, že matice se dramaticky zjednoduší, když druhý a třetí řádek vydělíme výrazem $1 - \lambda$, můžeme to provést. Výpočet se vážně zjednoduší. Musíme však pamatovat, že to provádíme za předpokladu $\lambda \neq 1$ a vrátit se k situaci $\lambda = 1$ zvlášť, což bychom ale museli tak jako tak.

Čemu se ale vážně vyhnout chceme, je řádky matice některými parametry násobit. Tím nejen že se nám výpočet větví, ale ještě si tím matici zaplevelíme dalšími parametry. Například pokud bychom v prvním kroku chtěli místo prohození řádků vynásobit druhý a třetí řádek parametrem λ , jednalo by se o úpravu vyloženě nešikovnou.

Soustava má právě jedno řešení tehdy a jen tehdy, když jsou na diagonále nenulová čísla. Speciální případy můžeme ošetřit hned a již nemusíme provádět eliminaci znovu, protože jsme ji už provedli. Dosadíme-li do výsledného tvaru $\lambda = 1$, dostaneme hned

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{Řešení: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Rozmyslíme, že $2 - \lambda - \lambda^2 = 0$ právě, když $\lambda = 1$ nebo $\lambda = -2$. Dosazením $\lambda = -2$ dostaneme hned

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \quad \text{Soustava nemá řešení.}$$

Nakonec pro $\lambda \neq 1, -2$ provedeme zpětnou substituci. Pro zjednodušení můžeme předem ještě druhou a třetí rovnici vydělit $1 - \lambda$, čímž dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda + 2 & \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{array}\right)$$

Nyní tedy zpětnou substitucí

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda + 2}, \\ y &= -\lambda^2 - \lambda + z = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda + 2}, \\ x &= \lambda - \lambda y - z = \frac{-\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda + 2}. \end{aligned}$$

11 Spektrální teorie matic

Všimli jste si už, že diagonální matice jsou prima? Moc příjemně se s nimi počítá. Pokud si vezmeme dvě diagonální matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix},$$

snadno spočítáme jejich součin:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}.$$

Spočítá se prostě po prvcích, ne nějakým prapodivným pravidlem! Rovněž lehce rozmyslíme, že $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když má všechny diagonální prvky nenulové,

a je-li to splněno, dostaneme

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

Inverze se opět počítá po prvcích! Kéž by všechny matice byly diagonální!

Mimochodem všimli jste si taky, že čtvercové matice se (na rozdíl od obdélníkových) dají násobit samy se sebou? Můžeme toto násobení značit – podobně jako u čísel – jako mocninu, tj. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k \times}$. Počítání mocnin diagonálních

matic je opět hračka:

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

Když čtvercové matice můžeme mocnit a sčítat, můžeme počítat libovolné polynomy. Protože diagonální matice lze sčítat i násobit, a tedy mocnit po prvcích, opět můžeme pro libovolný polynom $p(x)$ psát

$$p(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} p(a) & 0 & 0 \\ 0 & p(b) & 0 \\ 0 & 0 & p(c) \end{pmatrix}.$$

Sebereme-li dostatek odvahy, mohli bychom vzít libovolnou funkci f a definovat její působení na diagonální matice opět podobným způsobem. Ovšem to už začíná být trochu přitažené za vlasy, neboť doposud byly všechny operace definované obecně na všech maticích, tato operace by fungovala jen na diagonálních. Dá se jí dát opět obecnější smysl, ale asi to nechme prozatím stranou.

11.1 Příklad. Vraťme se k Fibonacciho posloupnosti, pro kterou jsme našli explicitní vzorec v příkladu 8.33, ale dejme tomu, že jsme ho mezi tím zapomněli. Původní motivací Leonarda z Pisy zvaného Fibonacci bylo popsat dynamiku růstu populace králíků. Předpokladem je, že každý dospělý pár králíků každý měsíc vyplodí jeden mladý pár králíků. Mladému páru králíků trvá jeden měsíc než dospějí. Máme-li tedy a mladých králíků a b dospělých králíků, příští měsíc bude b mladých a $a + b$ dospělých. Jedná se o lineární dynamický systém, neboť tento jeden krok lze popsat lineárním zobrazením $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a + b \end{pmatrix}.$$

Maticí tohoto lineárního zobrazení je

$$\mathbf{A} = [A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otázka zní, kolik králíků budeme mít po n měsících, pokud začneme s jedním dospělým párem, tj. zajímá nás $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obecně pro zadané $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ můžeme

hledat $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Přímou z definice A přitom máme $a_{n+1} = b_n$ a $b_{n+1} = a_n + b_n$. Dohromady tedy hledáme posloupnost (a_n) splňující $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, což je přesně rekurence, kterou jsme řešili v příkladu 8.33.

Velmi by se nám hodilo znát n -tou mocninu matice $\mathbf{A}$. Jaká velká škoda, že $\mathbf{A}$ není diagonální!

Vzhledem k tomu, že řešení problému již známe, zkusme reverzním inženýringem nalezené řešení interpretovat z tohoto úhlu pohledu. Našli jsme tehdy dvě významná řešení tvaru $(\varphi_\pm^n)$ pro $\varphi_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$ splňující $\varphi_\pm^2 = \varphi_\pm + 1$. V řeči našich vektorů máme posloupnosti $a_n = \varphi_\pm^n$, $b_n = \varphi_\pm^{n+1}$. Ty by měly být určeny počáteční podmínkou

$$\vec{x}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_\pm \end{pmatrix}.$$

Zkusme pro tuto konkrétní počáteční podmínku zrekonstruovat celé řešení

$$A\vec{x}_\pm = A \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\pm \\ 1 + \varphi_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\pm \\ \varphi_\pm^2 \end{pmatrix} = \varphi_\pm \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_\pm \end{pmatrix} = \varphi_\pm \vec{x}_\pm.$$

Tak to nabralo zajímavý vývoj. To znamená, že $A^2\vec{x}_\pm = A(\varphi_\pm\vec{x}_\pm) = \varphi_\pm A\vec{x}_\pm = \varphi_\pm^2\vec{x}_\pm$. Indukcí $A^n\vec{x}_\pm = \varphi_\pm^n\vec{x}_\pm$. My bychom ale chtěli znát $A^n\vec{x}$ pro libovolné $\vec{x}$. No ale pokud známe působení A^n na $\mathcal{X} = (\vec{x}_-, \vec{x}_+)$, což je báze $\mathbb{R}^2$, známe působení A^n na libovolný vektor. Například snadno rozmyslíme, že $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{x}_+ - \vec{x}_-)$, takže $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_+^n\vec{x}_+ - \varphi_-^n\vec{x}_-)$, tedy $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_+^n - \varphi_-^n)$, což už známe z příkladu 8.33.

Pokud chceme počítat v bázi $\mathcal{X}$ namísto standardní báze, možná by stálo za to vyjádřit operátor A v této bázi.

$$[A]_{\mathcal{X}} = ([A\vec{x}_1]_{\mathcal{X}} \quad [A\vec{x}_2]_{\mathcal{X}}) = ([\varphi_+\vec{x}_+]_{\mathcal{X}} \quad [\varphi_-\vec{x}_-]_{\mathcal{X}}) = \begin{pmatrix} \varphi_+ & 0 \\ 0 & \varphi_- \end{pmatrix}.$$

Jé, ona je diagonální!

11.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

11.2 Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$, $A \in \text{Lin}(L)$. Skalár $\lambda \in \mathbb{F}$ nazveme **vlastní číslo** operátoru A , pokud existuje nenulový vektor $\vec{x} \in L$ takový, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Tento vektor pak nazýváme **vlastní vektor** příslušný vlastnímu číslu λ .

V této kapitole, podobně jako v kapitole 7, budeme většinu definic formulovat pro lineární operátory a každá taková definice nám indukuje příslušný pojem pro matice. Zde tedy pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je $\lambda \in \mathbb{F}$ její vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, jestliže $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Zdůrazněme důležitost požadavku, že vlastní vektor musí být nenulový. Jinak by se totiž všechny skaláry daly považovat za vlastní čísla, neboť vždy platí $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$.

11.3 Příklady.

- Pro identický operátor $\text{id}: V \rightarrow V$ je každý nenulový vektor $\vec{x} \in V$ vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 1$. Jiná vlastní čísla tento operátor nemá.

- Pro nulový operátor $O: V \rightarrow V$ je každý nenulový vektor $\vec{x} \in V$ vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Jiná vlastní čísla tento operátor nemá.
- Uvažuje operátor $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ projekce na osu x , tedy $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Pak každý vektor $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 1$. Naopak každý vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $y \neq 0$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Jiná vlastní čísla ani vlastní vektory tento operátor nemá.

11.4 Pozorování. Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ je vlastním číslem operátoru A příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 0$ právě tehdy, když $A\vec{x} = \vec{0}$, tj. $\vec{x} \in \ker A$. Tedy A má vlastní číslo $\lambda = 0$ právě tehdy, když $\ker A \neq \{\vec{0}\}$, tedy právě tehdy, když A není prosté. Matice $\mathbf{A}$ má vlastní číslo $\lambda = 0$ právě tehdy, když je singulární.

Obecně pro hledání vlastních čísel a vlastních vektorů zadané matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ musíme zkrátka řešit rovnici $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Snadno nahlédneme, že je tato podmínka ekvivalentní rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = \vec{0}$. To odpovídá homogenní soustavě n lineárních rovnic s n neznámými a parametrem $\lambda \in \mathbb{F}$, přičemž maticí soustavy je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. Taková soustava má nenulové řešení právě tehdy, když je matice soustavy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ singulární. To můžeme rovněž charakterizovat podmínkou $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. To nám dává návod, jak vlastní čísla (pro malé matice) počítat prakticky.

11.5 Úloha. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Řešíme soustavu s maticí

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Taková soustava bude mít netriviální řešení právě tehdy, když

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (3 - \lambda)(2 - \lambda),$$

tj. když $\lambda = 2$ nebo $\lambda = 3$. Tím jsme našli vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Nyní najdeme příslušné vlastní vektory.

Pro $\lambda = 2$ můžeme tuto hodnotu dosadit do matice soustavy, upravit na horní stupňovitý tvar a vyřešit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vpravo uvádíme množinu řešení dané soustavy. Každý prvek daného lineárního obalu splňuje $\mathbf{A}\vec{x} = 2\vec{x}$ (ověřte výpočtem!). Každý *nenulový* prvek daného lineárního obalu je tedy vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 2$.

Pro $\lambda = 3$ můžeme udělat totéž:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

11.6 Cvičení. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro lineární zobrazení odpovídající Fibonaccimu dynamickému systému z příkladu 11.1.

Shrňme do vět a definic naše dosavadní pozorování.

11.7 Věta. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $A \in \text{Lin}(L)$. Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{F}$ je množina

$$\{\vec{x} \in L \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

vlastních vektorů A příslušných vlastnímu číslu λ doplněná o nulový vektor $\vec{0} \in L$ lineárním podprostorem L . Tento lineární podprostor se rovná jádru lineárního operátoru $A - \lambda \text{id}_L$.

Důkaz. Máme $(A - \lambda \text{id})\vec{x} = A\vec{x} - \lambda\vec{x}$, tedy zjevně platí $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ právě tehdy, když $(A - \lambda \text{id})\vec{x} = \vec{0}$. Podle věty 7.13 jde o lineární podprostor. $\square$

11.8 Cvičení. Dokažte přímo (bez použití věty 7.13), že je množina $\{\vec{x} \in L \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$ lineárním podprostorem L .

11.9 Definice. Lineární podprostor z předchozí věty se nazývá **vlastní podprostor** lineárního zobrazení A . Jeho dimenze se nazývá **geometrická násobnost** vlastního čísla λ .

11.10 Pozorování. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ polynom v proměnné λ s koeficienty v $\mathbb{F}$ stupně n . Číslo $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když je kořenem tohoto polynomu.

11.11 Definice. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ nazýváme polynom $p_{\mathbf{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) \in \mathbb{F}[x]$ **charakteristický polynom** matice $\mathbf{A}$. Necht λ je kořen $p_{\mathbf{A}}$. Násobnost tohoto kořene nazýváme **algebraická násobnost** vlastního čísla λ .

11.12 Poznámka (O kořenech polynomů). Polynom $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ je *výraz*, to znamená, že za formální proměnnou x můžeme dosadit jakékoliv číslo $\alpha \in \mathbb{F}$ a dostaneme pak prvek $p(\alpha) \in \mathbb{F}$. Řekneme, že $\alpha \in \mathbb{F}$ je **kořen** polynomu $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, jestliže $p(\alpha) = 0$.

Není těžké dokázat, že je-li $\alpha \in \mathbb{F}$ kořenem $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, pak existuje polynom $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ takový, že $p(x) = (x - \alpha)q(x)$. Jinými slovy, polynom $p(x)$ pak lze beze zbytku vydělit **kořenovým činitelem** $(x - \alpha)$.

Poté může a nemusí platit, že α je kořenem podílu $q(x)$. Pokud to tak je, můžeme proces opakovat – řekněme k -krát – do té doby než dostaneme polynom takový, že α jeho kořenem není. Číslu k takovému, že $p(x) = (x - \alpha)^k q(x)$, přičemž $q(\alpha) \neq 0$, říkáme **násobnost** kořene α .

Důsledkem tohoto tvrzení rovněž je, že každý polynom $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ stupně n může mít nanejvýš n kořenů, a to včetně násobností, tj. počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost. Vskutku, necht $p(x)$ má kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ násobností $k_1, \dots, k_l$. Pak není těžké ukázat, že musí existovat polynom $q(x)$ takový, že $p(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_l)^{k_l} q(x)$. Zjevně pak $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_l + \deg q(x) > k_1 + k_2 + \cdots + k_l$.

Takzvaná *Základní věta algebry*⁴³ říká, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ je takzvaně *algebraicky uzavřené*: Každý polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupně $\deg p(x) \geq 1$ má alespoň jeden kořen $\alpha \in \mathbb{C}$. V důsledku můžeme v rozkladu zadaného polynomu pokračovat až do stavu, kdy ho vyjádříme jako součin n lineárních faktorů – kořenových činitelů. Každý komplexní polynom stupně n má tedy právě n kořenů, pokud každý počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost.

11.13 Poznámka. V poznámce 10.23 jsme zmínili, že pojem determinant lze zavést pro libovolný operátor na konečněrozměrném prostoru. To nám umožňuje zavést charakteristický polynom nejen pro matice, ale pro operátory. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L < \infty$, $A \in \text{Lin}(L)$. Potom definujeme charakteristický polynom operátoru A jako $p_A(x) = \det(A - x \text{id}) = \det([A]_{\mathcal{X}} - x\mathbf{E})$, kde $\mathcal{X}$ je nějaká báze L .

Kvůli lidem, kteří umějí akorát násobit matice a neumějí pracovat s abstraktnějšími lineárními zobrazeními se zavádí následující definice:

11.14 Definice. Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ se nazývají **podobné**, jestliže existuje regulární matice $\mathbf{T} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

11.15 Poznámka. Na podobné matice lze nahlížet jako na dvě matice téhož lineárního operátoru (na nějakém lineárním prostoru dimenze n) ve dvou různých bázích. Víme totiž, že každá regulární matice se dá interpretovat jako matice přechodu. Nechť například $A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ působí jako $A\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}$. Nechť dále $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{F}^n$ tvořená sloupčky matice $\mathbf{T}$. Potom $\mathbf{T} = [\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}}$, tedy

$$\mathbf{B} = [\text{id}]_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}} [A]_{\mathcal{E}} [\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{X}}.$$

11.16 Věta. Podobné matice mají stejný charakteristický polynom, a tedy i stejná vlastní čísla.

Důkaz. Jedná se stále o totéž. Je-li $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, pak

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{T}) \\ &= \det \mathbf{T}^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \det \mathbf{T} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}). \quad \square \end{aligned}$$

11.17 Cvičení. Nechť $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Již víme, že $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejná vlastní čísla. V jakém vztahu jsou vlastní vektory $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$?

11.18 Poznámka. Opačná implikace ve větě 11.16 neplatí: Uvažujme matice $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obě mají charakteristický polynom $p(\lambda) = \lambda^2$, avšak nulovou matici nemůžeme násobením transformovat na nenulovou.

⁴³ Zde vystupuje slovo *algebra* ve smyslu nauky o řešení rovnic. Větu je nutné dokázat s nezávadným přispěním matematické analýzy. Žádný důkaz využívající pouze abstraktní algebru není znám. Není ani tolik divu: jde o výsledek, který se týká komplexních (polynomiálních) funkcí, které studuje právě (komplexní) analýza, nikoliv abstraktní algebra.

11.19 Poznámka. Snadno nahlédneme, že horní trojúhelníková matice má na diagonále svá vlastní čísla. Člověka by tedy mohlo napadnout, jak už nás to napadlo s problémem řešení soustav a výpočtu determinantu, že by se vlastní čísla mohly počítat Gaussovou eliminací. Tento nápad není dobrý. Řádkové úpravy nezachovávají vlastní čísla! Vzpomeňme na větu 8.16, kde jsme ukázali, že matici $\mathbf{A}$ lze převést sledem ekvivalentních řádkových úprav na matici $\mathbf{B}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$. My bychom však potřebovali, aby $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$, tedy museli bychom s každou řádkovou úpravou současně provést tutéž úpravu se sloupcečky. Tím by se z jednoduchého algoritmu stal těžko řešitelný hlavolam.

Že řádkové úpravy nemohou zachovávat vlastní čísla je vidět i na tom, že každou regulární matici lze pomocí nich Gaussovou–Jordanovou eliminací převést na jednotkovou matici. Ovšem ne každá regulární matice má jediné vlastní číslo jedničku. Neplatí ani to, že by pouze některé řádkové úpravy zachovávaly vlastní čísla. Například matice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla -2 a -3 zatímco pokud čtyřikrát odečteme první řádek od druhého, dostaneme matici s vlastními čísly 1 a 6 . Ověřte, že ani prohození řádků vlastní čísla nezachovává.

11.2 Diagonalizace

V úvodu kapitoly jsme naznačili, že s diagonálními maticemi se počítá velmi příjemně. Co se týče lineárních operátorů, tak se počítá velmi příjemně s těmi, pro které existuje báze z vlastních vektorů. Již jsme naznačili, že tyto dvě vlastnosti spolu úzce souvisejí. Tuto souvislost nyní zformulujeme a dokážeme. Následně by nás zajímalo, zda lze každou matici upravit na diagonální, aby se nám s ní snadno počítalo.

11.20 Definice. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je **diagonální**, jestliže $\mathbf{A}_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Budeme pak značit $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \dots, \mathbf{A}_{nn})$.

11.21 Definice. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L < \infty$. Lineární operátor $A \in \text{Lin}(L)$ je **diagonalizovatelný**, jestliže existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru L taková, že $[A]_{\mathcal{X}}$ je diagonální.

11.22 Věta. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L < \infty$. Operátor $A \in \text{Lin}(L)$ je diagonalizovatelný právě tehdy, když v L existuje báze tvořená vlastními vektory A .

Důkaz. ($\Rightarrow$): Necht A má v bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ diagonální tvar $[A]_{\mathcal{X}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. To znamená, že $[A\vec{x}_i]_{\mathcal{X}} = \lambda_i \vec{e}_i$, čili $A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$. Vektory báze $\mathcal{X}$ jsou tedy vlastní vektory.

($\Leftarrow$): Necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze tvořená vlastními vektory, tj. splňující $A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$ pro nějaká čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak stejným způsobem snadno nahlédneme, že $[A]_{\mathcal{X}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\square$

11.23 Poznámka. Přeformulujme opět uvedenou definici pro matice. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, jestliže existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{F}^n$ taková, že $[A]_{\mathcal{X}}$ je diagonální, kde $A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ je operátor definovaný působením $A\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}$. S použitím poznámky 11.15 však můžeme definici rovněž elegantně přeformulovat takto:

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, jestliže je podobná diagonální matici. Tedy $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná, právě když existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a regulární

matice $\mathbf{T}$ takové, že $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ (nebo ekvivalentně $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$). Důkaz věty 11.22 a poznámka 11.15 nám navíc říkají, jak ony matice vypadají: $\mathbf{T}$ má ve sloupečích onu bázi z vlastních vektorů a $\mathbf{D}$ má na diagonále příslušná vlastní čísla.

Naším zbožným přáním tedy nyní bude ukázat, že lze každou matici diagonalizovat. Naivní důkaz by mohl vypadat takto: Máme-li matici $n \times n$, znamená to, že její charakteristický polynom bude stupně n , bude tedy mít n kořenů – n vlastních čísel, každému vlastní mu číslu λ_i bude příslušet vlastní vektor $\vec{x}_i$, a ty budou dohromady tvořit hledanou bázi vlastních vektorů $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Uvedená argumentace nyní obsahuje jisté myšlenkové skoky, které je potřeba dovysvětlit.

Jeden zádrhel už možná tušíme. Že polynom stupně n musí mít n kořenů je pravda nad $\mathbb{C}$, nikoliv nad obecným tělesem.

11.24 Příklad. Necht $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je operátor otočení o 90° . Operace otočení zjevně žádný vlastní vektor nemá. Podívejme se, kde náš postup výpočtu zkrachuje.

Uvedený operátor je možné popsat maticí $\mathbf{A} = [A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Najdeme charakteristický polynom:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Tento polynom nad zadaným tělesem $\mathbb{R}$ nemá žádný kořen, zadané lineární zobrazení tedy nemá žádné vlastní číslo, a tak ani žádný vlastní vektor. To však nutně neznamená, že nám v tomto případě teorie této kapitoly nemůže nijak pomoci. Reálná čísla jsou podtělesem komplexních. Matici $\mathbf{A}$ lze vnímat rovněž jako komplexní matici a hledat její vlastní čísla a vlastní vektory nad $\mathbb{C}$.

Kořeny zadaného polynomu jsou $\lambda = \pm i$. Najdeme příslušné vlastní vektory.

$$\begin{aligned} \lambda = +i: \quad & \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \lambda = -i: \quad & \begin{pmatrix} +i & -1 \\ 1 & +i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nalezená dvojice vlastních vektorů je lineárně nezávislá. Tvoří tedy bázi $\mathbb{C}^2$. V důsledku lze matici $\mathbf{A}$ (nad $\mathbb{C}$) diagonalizovat. Platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1},$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Z praktického hlediska je uvedený výsledek stejně dobře použitelný, jako kdybychom diagonalizovali nad $\mathbb{R}$. Řekněme, že nás zajímá, jak bude působit operátor A^{1000} a nenapadne nás, že čtyři otočení o 90° dají identické zobrazení, které můžeme zopakovat třeba dvěstěpadesátkrát a stále bude výsledkem identita. Můžeme použít právě diagonalizovaný tvar matice operátoru

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{1000} &= (\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1})^{1000} = \mathbf{T}\mathbf{D}\underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}}_{=\mathbf{E}}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1} \dots = \mathbf{T}\mathbf{D}^{1000}\mathbf{T}^{-1} \\ &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} i^{1000} & 0 \\ 0 & (-i)^{1000} \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

11.25 Cvičení. Dokažte, že je-li $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ kořenem polynomu $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s reálnými koeficienty. Pak je číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha} = a - ib$ rovněž kořenem $p(x)$. Dokažte, že je-li $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ vlastní vektor reálné matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$, pak je vektor utvořený z $\vec{x}$ komplexním sdružením všech složek vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Další otázkou je, zda nalezené vlastní vektory vždy nutně musejí tvořit bázi. Na první pohled jich je správný počet, ale nevysvětlili jsme, proč by měly být lineárně nezávislé či generující.

11.26 Věta. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L < \infty$, $A \in \text{Lin}(L)$. Necht $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou vlastní vektory A příslušné vzájemně různým vlastním číslům. Potom je posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ lineárně nezávislá.

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Necht jsou tedy všechny předpoklady splněny, ale zároveň platí, že je posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ lineárně závislá. Potom v ní existuje nějaký vektor, který je lineární kombinací předchozích. Vezměme ten první, který to splňuje. Necht tedy platí, že $\vec{x}_i \in \text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}\}$ a necht je zároveň posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1})$ lineárně nezávislá. Máme tedy $\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \vec{x}_j$ a protože $\vec{x}_i \neq \vec{0}$, ne všechny α_j jsou nulové. Na tuto rovnost můžeme aplikovat operátor A , čímž dostaneme $\lambda_i \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j$. Dosadíme do levé strany původní vyjádření $\vec{x}_i = \sum \alpha_j \vec{x}_j$ a dostaneme dohromady

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_i) \vec{x}_j = \vec{0}.$$

Tím jsme ale dokázali netriviálně nakombinovat nulový vektor pomocí lineárně nezávislé posloupnosti. To je spor. $\square$

11.27 Poznámka. V lineární algebře důkaz sporem prakticky není potřeba. I výše uvedená věta se dá dokázat přímo. Zkuste to! Bude nutné použít matematickou indukci. Zde jsme explicitní použití matematické indukce obešli oblíbeným trikem „necht i je nejmenší číslo takové, že neplatí ...“.

11.28 Poznámka. Tvrzení věty mají lidé tendenci zkráceně formulovat takto: „Vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.“ Pokud víme, co tím chceme říct a dokážeme to případně vysvětlit, prosím, budiž. Ale mějme na paměti, že je to formulace nepořádná. Žádný pojem *lineárně nezávislé vektory* neexistuje. Lineární nezávislost je vlastnost *posloupnosti* vektorů jako celku.

11.29 Důsledek. Jestliže $\dim L = n$ a $A \in \text{Lin}(L)$ má n vzájemně různých vlastních čísel, pak je A diagonalizovatelný.

Podobně: Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, která má n vzájemně různých vlastních čísel, je diagonalizovatelná.

Při vynechání předpokladu, že mají být vlastní čísla vzájemně různá, věta zjevně neplatí. (Je-li $\vec{x}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ , pak totéž platí i pro jeho

libovolný násobek. Takto sestavená posloupnost lineárně nezávislá být pochopitelně nemůže.

Vidíme tedy jistý zádrhel: Co když A nemá n vzájemně různých vlastních čísel? Charakteristický polynom totiž může mít nějaký kořen třeba dvojnásobný. Pak by bylo nutné najít pro tento kořen dva lineárně nezávislé vektory.⁴⁴ Nebo třeba tři, abychom měli pro sichr ještě nějaký v záloze. Ne, to by nešlo:

11.30 Věta. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L < \infty$, $A \in \text{Lin}(L)$. Potom je geometrická násobnost každého vlastního čísla menší nebo rovna algebraické násobnosti.

Důkaz. Necht μ je vlastní číslo a necht $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je báze příslušného vlastního podprostoru. Tedy k je geometrická násobnost vlastního čísla μ a platí $A\vec{x}_i = \mu\vec{x}_i$ pro každé $i = 1, \dots, k$. Doplňme tuto posloupnost na bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ celého prostoru L . Nyní se snadno přesvědčíme, že $[A]_{\mathcal{X}}$ má blokový tvar

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \mu \mathbf{E}_k & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

Nyní se pokusíme odhadnout algebraickou násobnost μ . Potřebujeme tedy spočítat charakteristický polynom $p_A(x) = \det(A - x \text{id}_L) = \det([A]_{\mathcal{X}} - x \mathbf{E}_n)$. Opakovaným použitím rozvoje determinantu podle prvních k sloupečků snadno nahlédneme, že $p_A(x) = (\mu - x)^k p_{\mathbf{D}}(x)$, tedy μ je alespoň k -násobným kořenem $p_A(x)$. $\square$

11.31 Příklad. Matice $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má charakteristický polynom

$$p_{\mathbf{N}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

Má jediné vlastní číslo $\lambda = 0$, jenž je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu (jeho algebraická násobnost se tedy rovná dvěma). Příslušný vlastní podprostor $\ker \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ je však jednorozměrný (geometrická násobnost vlastního čísla je jedna). Opačná nerovnost v předchozí větě tedy neplatí, tato matice není diagonalizovatelná.

11.32 Věta. Necht L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L = n \in \mathbb{N}$, $A \in \text{Lin}(L)$. Lineární operátor A je diagonalizovatelný právě tehdy, když má n vlastních čísel včetně násobností a geometrická násobnost každého vlastního čísla se rovná algebraické.

Důkaz. ($\Rightarrow$): Je-li A diagonalizovatelný, pak v L existuje báze z vlastních vektorů A . Taková báze bude obsahovat n prvků a z každého vlastního podprostoru jich může obsahovat maximálně tolik, kolik je jeho dimenze. Součet geometrických násobností se tedy musí rovnat alespoň n . Přitom jsme již ukázali, že algebraická násobnost nemůže být menší než geometrická a součet algebraických násobností je vždy nejvýše

⁴⁴ Pečlivý čtenář právě špačkuje, že neví, co je tím myšleno. Myslím tím opravdu jen to, že má být dvoupřvková posloupnost obsahující tyto dva vektory lineárně nezávislá? Plyne z toho snad už, že když ji doplním o vlastní vektory příslušné dalším vlastním číslům, že výsledek musí opět být lineárně nezávislý?

n . Vše lze tedy zároveň splnit jediné tak, že geometrické násobnosti se budou rovnat algebraickým a jejich součet bude právě n .

($\Leftarrow$): Necht λ_i jsou vzájemně různá vlastní čísla A . Označme $\vec{x}_i^1, \dots, \vec{x}_i^{k_i}$ bázi vlastního podprostoru příslušného λ_i , kde tedy k_i je násobnost vlastního čísla. Podle předpokladů je celkový počet takto zkonstruovaných vektorů n . Zbývá ukázat, že jsou lineárně nezávislé. Uvažujme tedy nějakou lineární kombinaci dávající nulový vektor

$$\alpha_1^1 \vec{x}_1^1 + \alpha_1^2 \vec{x}_1^2 + \dots + \alpha_1^{k_1} \vec{x}_1^{k_1} + \alpha_2^1 \vec{x}_2^1 + \dots = \vec{0}.$$

Označme $\vec{y}_i = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_i^j \vec{x}_i^j$, čímž $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots = \vec{0}$. Zároveň jsou všechny nenulové $\vec{y}_i$ vlastní vektory A příslušné vlastním číslům λ_i . Víme však, že vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé. Nemůžeme z nich tedy netriviálně nakombinovat nulový vektor, a proto musí platit $\vec{y}_i = \vec{0}$ pro každé i . Z lineární nezávislosti báží $(\vec{x}_i^1, \dots, \vec{x}_i^{k_i})$ jednotlivých vlastních podprostorů pak plyne, že všechny koeficienty α_i^j jsou nulové. $\square$

11.33 Důsledek. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když se geometrická násobnost každého vlastního čísla rovná algebraické.

11.3 Aplikace

Nyní se na chvíli vraťme k motivaci pro počítání vlastních čísel a vlastních vektorů a uveďme pár dalších aplikací. Vše bude souviset s tím, že *diagonální matice jsou prima*, problémy se pro diagonální matice řeší daleko snadněji než pro obecné. Následující úlohy svojí náročností převyšují to, co lze očekávat ve zkouškové písence, avšak dobře ilustrují, k čemu je proces diagonalizace dobrý.

11.34 Úloha. Nalezněte Matici $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ takovou, že $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení. Úloha se zdá být velmi náročná, neboť matice sice umíme násobit, ale neznáme nic jako odmocninu z matice. Úloha by se však dramaticky zjednodušila, kdyby zadaná matice byla diagonální. Pro $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ snadno najdeme její „odmocninu“ a sice matici $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$ (aby mělo odmocňování smysl, musejí být $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, nicméně úloha by v komplexním oboru měla řešení pro libovolné $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$). My však umíme matici $\mathbf{A}$ diagonalizovat.

Snadno spočítáme, že vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda = 2, 4$ a příslušnými vlastními vektory jsou (například) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Z toho plyne, že $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^{-1}$, kde $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \text{diag}(2, 4)$. Hledanou maticí pak bude matice

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}/2 & -1 + \sqrt{2}/2 \\ -1 + \sqrt{2}/2 & 1 + \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Pro zajímavost poznamenejme, že každá symetrická reálná matice je diagonalizovatelná a má reálná vlastní čísla. Taková matice $\mathbf{A}$ se nazývá *pozitivně semidefinitní* (v teorii operátorů často jen *pozitivní*; značíme $\mathbf{A} \geq 0$), jestliže má všechna vlastní čísla nezáporná. Pro takovou matici existuje právě jedna pozitivně semidefinitní matice $\mathbf{B}$ splňující $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$. Říkáme jí *odmocnina* z matice $\mathbf{A}$ a značíme $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$.

11.35 Úloha. Najděte funkce $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující následující podmínky

$$\begin{aligned}f'(x) &= -f(x) + 6g(x), \\g'(x) &= f(x) - 2g(x).\end{aligned}$$

Řešení. Jedná se o soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Vy neumíte řešit vůbec žádné diferenciální rovnice, ale věřte, že řešit ty lineární je docela jednoduché. Jistě víte, že exponenciála je taková bytelná funkce, která přežije jakékoliv derivování. Je tedy řešením diferenciální rovnice $f'(x) = f(x)$. Pokud navíc přidáme podmínku $f(0) = 1$, je funkce $f(x) = e^x$ jediným řešením této rovnice. (V některých učebnicích matematické analýzy je funkce e^x (a skrze ni pak obecná reálná mocnina) tímto způsobem přímo definována.) Obecně rovnici $f'(x) = f(x)$ splňují právě⁴⁵ funkce tvaru $f(x) = ae^x$, kde význam konstanty a je *počáteční podmínka* $a = f(0)$. Nyní bychom se mohli podívat na trochu obecnější rovnici tvaru $f'(x) = \lambda f(x)$. Jejím řešením budou právě funkce $f(x) = ae^{\lambda x}$. Právě jste prošli rychlokurzem řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic.

Zadána však nebyla jedna rovnice, ale soustava. Vy byste soustavu dokázali vyřešit, kdyby jaksi nebyla soustavou – kdyby v ní jednotlivé rovnice nebyly provázané. Dokázali byste vyřešit jednodušší soustavu

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x) &= \lambda_1 \tilde{f}(x), \\ \tilde{g}'(x) &= \lambda_2 \tilde{g}(x).\end{aligned}$$

Všimněme si, že původní soustavu lze přepsat do tvaru

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Řešíme tedy $\vec{\varphi}'(x) = \mathbf{A}\vec{\varphi}(x)$, kde $\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ je neznámá vektorová funkce a $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Kdybychom nepsali matice tučným písmem, mohli bychom psát řešení rovnou jako $\vec{\varphi}(x) = e^{\mathbf{A}x}\vec{a}$. Takto je ale velmi pravděpodobné, že si někdo všimne, že máme matici v exponentu a prohlásí nás za blázný.

Všimneme si však, že jediné co nám komplikuje řešení je fakt, že matice $\mathbf{A}$ není diagonální, a tak si zavoláme na pomoc proces diagonalizace. Matici $\mathbf{A}$ lze diagonalizovat jako $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$, kde $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \text{diag}(-4, 1)$. Pokud tedy v soustavě provedeme substituci $\begin{pmatrix} \tilde{f}(x) \\ \tilde{g}(x) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$, soustava nabude diagonálního tvaru s maticí $\mathbf{D}$ a snadno ji vyřešíme jako $\tilde{f}(x) = \tilde{a}e^{-4x}$, $\tilde{g}(x) = \tilde{b}e^x$. Řešení původní soustavy dostaneme jako

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \tilde{f}(x) \\ \tilde{g}(x) \end{pmatrix} = \tilde{a}e^{-4x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{b}e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

⁴⁵ Že uvedené funkce rovnici řeší snadno ověříte. Že jde o jediné řešení se musí dokázat a využije se k tomu lineární algebra. Dá se totiž dokázat, že množina řešení musí být lineární prostor dimenze jedna.

tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\tilde{a}e^{-4x} + 3\tilde{b}e^x \\ g(x) &= \tilde{a}e^{-4x} + \tilde{b}e^x. \end{aligned}$$

Konstanty $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$ dostaneme z počátečních podmínek jako

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \end{pmatrix}.$$

Nakonec ještě poznamenejme, že celkové řešení je vskutku tvaru $\vec{\varphi}(x) = e^{\mathbf{A}x}\vec{a}$, kde

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} \mathbf{T}^{-1}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \end{pmatrix}.$$

Více informací o řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic se dozvíte v předmětu DRN.

11.4 Jordanův kanonický tvar

No a co teď s maticemi, které nelze diagonalizovat? Ono je půjde skorodagonalizovat.

11.36 Definice. Nechť $\lambda \in \mathbb{F}$, $k \in \mathbb{N}$. Matici

$$\mathbf{J}_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times k}$$

budeme nazývat **Jordanova buňka**. Řekneme, že matice $\mathbf{J}$ je v **Jordanově tvaru**, pokud je *blokově diagonální* s Jordanovými buňkami na diagonále. Tedy pokud existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{F}$ a $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\lambda_1,k_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda_2,k_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{\lambda_s,k_s} \end{pmatrix}$$

11.37 Věta (Jordanův⁴⁶ rozklad). Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L = n \in \mathbb{N}$. Nechť má operátor $A \in \text{Lin}(L)$ právě n vlastních čísel včetně násobností. Potom existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru L taková, že $[A]_{\mathcal{X}}$ je v Jordanově tvaru.

11.38 Důsledek. Každá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná matici v Jordanově tvaru.

⁴⁶ Camille Jordan 1838–1922, slavný francouzský matematik.

Větu nebudeme dokazovat v plné obecnosti. Pokusíme se ji podrobně pochopit a dokázat pro případ dimenze $n = 2$. Následně naznačíme, co je obsahem věty a jak by se dokazovala pro obecné n .

Uvažujme tedy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Taková matice může a nemusí být diagonalizovatelná. Pokud je diagonalizovatelná, znamená to, že je podobná matici $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, která již je v Jordanově tvaru – obsahuje dvě buňky $\mathbf{J}_{\lambda_1,1}$ a $\mathbf{J}_{\lambda_2,1}$. Pokud není diagonalizovatelná, stále musí mít alespoň jedno vlastní číslo, neboť komplexní charakteristický polynom musí mít aspoň jeden kořen. Pokud by měla dvě různá vlastní čísla, je určitě diagonalizovatelná. Musí tedy mít jen jedno vlastní číslo algebraické násobnosti dva. Tomu vlastnímu číslu přísluší aspoň jeden vlastní vektor. Geometrická násobnost tohoto jediného vlastního čísla tedy musí být jedna.

11.39 Tvzení. Buď L lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim L = 2$. Necht $A \in \text{Lin}(L)$ má právě jedno vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{F}$ algebraické násobnosti 2 a geometrické násobnosti 1. Potom existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru L taková, že

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Označme $B = A - \lambda \text{id}$. Jádru $\ker B$ je podle věty 11.7 a definice 11.9 právě vlastní podprostor A příslušný vlastnímu číslu λ . Z předpokladů je tento prostor jednorozměrný. Podle věty o dimenzi jádra a obrazu 7.19 to zároveň znamená $\text{rank } B = 1$, tedy $\text{im } B = \text{span}\{x\}$ pro nějaké $\vec{x} \neq \vec{0}$. Z definice obrazu máme speciálně $B\vec{x} \in \text{im } B$, tedy $B\vec{x} = \mu\vec{x}$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{F}$. Potom ale $A\vec{x} = (B + \lambda \text{id})\vec{x} = (\mu + \lambda)\vec{x}$. Ale A má podle předpokladů jediné vlastní číslo λ , musí tedy být $\mu = 0$. V důsledku tedy $\vec{x} \in \ker B$, čili $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vezměme nyní $\vec{z} \in L$, $\vec{z} \notin \ker B$. Potom $B\vec{z} \in \text{im } B$, přičemž $B\vec{z} \neq \vec{0}$. To znamená, že $B\vec{z} = \alpha\vec{x}$ pro nějaké $\alpha \neq 0$. Vezmeme-li $\vec{y} = \frac{1}{\alpha}\vec{z}$, obdržíme $B\vec{y} = \vec{x}$.

Tím máme všechny potřebné ingredience. Nyní je již snadné nahlédnout, že pro $\mathcal{X} = (\vec{x}, \vec{y})$ dostáváme žádaný tvar. $\square$

Naši motivaci pro diagonalizaci bylo, že se s diagonálními maticemi snadno počítá. Speciálně se snadno počítají mocniny diagonálních matic. To bude platit i zde:

11.40 Tvzení. Platí

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Důkaz. Cvičení! (Matematickou indukcí.) $\square$

Tvrzení dokážeme v obecnějším případě níže.

Nyní se pokusme získat trochu více vhledu pro Jordanův rozklad obecných matic. Nejprve se podívejme na obecnou Jordanovu buňku $\mathbf{J}_{\lambda,k}$.

11.41 Pozorování.

- $\mathbf{J}_{\lambda,k}$ má jediné vlastní číslo λ algebraické násobnosti k a geometrické násobnosti jedna. V důsledku tato matice není diagonalizovatelná (za předpokladu $k > 1$).

- Platí $\mathbf{J}_{\lambda,k}\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1$ neboli $(\mathbf{J}_{\lambda,k} - \lambda\mathbf{E}_k)\vec{e}_1 = \vec{0}$. Tedy tím (až na násobek) jediným vlastním vektorem je $\vec{e}_1$.
- Pro $j > 1$ platí $\mathbf{J}_{\lambda,k}\vec{e}_j = \lambda\vec{e}_j + \vec{e}_{j-1}$ neboli $(\mathbf{J}_{\lambda,k} - \lambda\mathbf{E}_k)\vec{e}_j = \vec{e}_{j-1}$.
- Můžeme vyjádřit $\mathbf{J}_{\lambda,k} = \lambda\mathbf{E}_k + \mathbf{N}_k$, kde $\mathbf{N}_k$ je matice s jedničkami těsně nad diagonálou a nulami jinde. Jak jsme již zmínili $\mathbf{N}_k\vec{e}_j = \vec{e}_{j-1}$ a speciálně tedy $\mathbf{N}_k^k = \mathbf{O}$.
- Pro obecné $j \geq 1$ má matice $\mathbf{N}_k^j$ jedničky ve všech prvcích, které jsou j políček nad diagonálou, jinde má nuly. Má j vlastních vektorů $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j$ všechny příslušné vlastnímu číslu 0.

11.42 Pozorování. Necht A je lineární operátor na L , $\dim L = k$. Necht existuje báze $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ prostoru L taková, že $[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\lambda,k}$. Potom musí pro A platit stejná tvrzení, jako jsme výše pozorovali pro buňku $\mathbf{J}_{\lambda,k}$ nahradíme-li kanonickou bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{F}^n$ bázi $\mathcal{X}$ prostoru L . Speciálně tedy:

- A má jediné vlastní číslo λ algebraické násobnosti k a geometrické násobnosti 1. Je-li $k > 1$, pak A není diagonalizovatelný.
- Platí, že $\vec{x}_1$ je oním (až na násobek) jediným vlastním vektorem $A\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1$.
- Pro $j > 1$ platí $A\vec{x}_j = \lambda\vec{x}_j + \vec{x}_{j-1}$.
- Pro $N = A - \lambda \text{id}$ platí $N\vec{x}_j = \vec{x}_{j-1}$, $N\vec{x}_1 = \vec{0}$. V důsledku je $N^k = \mathbf{O}$.
- Vektor $\vec{x}_1$ je rovněž jednoznačně určen podmínkou $\vec{x}_1 \in \text{im } N^{k-1}$ (neboť $N^{k-1}\vec{x}_k = \vec{x}_1$ zatímco $N^{k-1}\vec{x}_j = \vec{0}$ pro $j < k$).

Často se nám opakuje následující vlastnost:

11.43 Definice. Necht L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Operátor $N \in \text{Lin}(L)$ nazýváme **nilpotentní**, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $N^k = \mathbf{O}$.

Nyní nebude až tak složité zobecnit naše úvahy z Tvrzení 11.39 a dokázat další střípek věty o Jordanově rozkladu.

11.44 Tvrzení. Necht L je lineární prostor nad $\mathbb{C}$, $\dim L = k$. Necht $A \in \text{Lin}(L)$ má jediné vlastní číslo λ geometrické násobnosti jedna. Potom existuje báze $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ taková, že $[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\lambda,k}$.

Důkaz. Budeme opět zkoumat operátor $N = A - \lambda \text{id}$. Podle předpokladu je $\text{def } N = 1$, tedy $\text{rank } N = k - 1$. Z definice obrazu zobrazení je $N\vec{x} \in \text{im } N$ pro každé $\vec{x} \in L$ a speciálně pro každé $\vec{x} \in \text{im } N$. Zobrazení N tedy jde zúžit na zobrazení $N|_{\text{im } N}: \text{im } N \rightarrow \text{im } N$. Protože se pohybuje nad tělesem $\mathbb{C}$, musí mít $N|_{\text{im } N}$ aspoň jeden vlastní vektor. Naopak každý vlastní vektor operátoru $N|_{\text{im } N}$ musí být vlastním vektorem původního operátoru N , jenž měl jediný vlastní vektor. V důsledku je $\ker N|_{\text{im } N} = \ker N$ a je tedy jednorozměrné. $\text{im } N|_{\text{im } N} = \text{im } N^2$ tedy má dimenzi $k-2$. Takto můžeme pokračovat k -krát až dojdeme k závěru, že $\text{im } N^k = \{0\}$. Operátor N je tedy nilpotentní.

Nyní vezmeme $\vec{x}_1 \in \ker N = \text{im } N^{k-1}$. Dále bereme vždy $\vec{x}_j$ jako vzor $\vec{x}_{j-1}$ při zobrazení $N|_{\text{im } N^{k-j}}$. Snadno nahlédneme, že $\vec{x}_j \in \text{im } N^{k-j}$ a $\vec{x}_j \notin \text{im } N^{k-j+1}$ z čehož lze usoudit, že takto vzniklá posloupnost $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ musí být lineárně nezávislá. $\square$

11.45 Tvzení. Platí

$$\mathbf{J}_{\lambda,k}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \cdots & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} & \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ 0 & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \cdots & \binom{m}{k-3}\lambda^{m-k+3} & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^m & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

Důkaz. Platí $\mathbf{J}_{\lambda,k} = \lambda\mathbf{E}_k + \mathbf{N}_k$, kde $\mathbf{N} = \mathbf{J}_{0,k}$ je nilpotentní matice splňující $\mathbf{N}^k = \mathbf{O}$. Nyní využijeme binomickou větu, která říká, že pokud⁴⁷ $ab = ba$, pak platí $(a+b)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^{m-i} b^i$. Protože jednotková matice a tedy každý její násobek s libovolnou další komutuje, můžeme zde binomickou větu použít:

$$\mathbf{J}_{\lambda,k}^m = (\lambda\mathbf{E} + \mathbf{N})^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \lambda^{m-i} \mathbf{N}^i.$$

Již jsme jednou výše zmínili, že $\mathbf{N}^i$ je matice, jenž má jedničky v pozicích i políček nad diagonálou a jinde nuly. $\square$

Můžeme se pokusit rozmyslet si, co nám Jordanův tvar o zadaném operátoru říká obecně. V plné obecnosti větu již dokazovat nebudeme.

11.46 Pozorování. Nechť A je lineární operátor na L a nechť $\mathcal{X}$ je báze taková, že $[A]_{\mathcal{X}}$ má Jordanův tvar s Jordanovými bločky $\mathbf{J}_{\lambda_1,k_1}, \dots, \mathbf{J}_{\lambda_s,k_s}$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_{11}, \vec{x}_{12}, \dots, \vec{x}_{1k_1}, \vec{x}_{21}, \dots, \vec{x}_{2k_2}, \dots, \vec{x}_{sk_s})$ vektory příslušné báze.

- Platí $A\vec{x}_{i1} = \lambda_i\vec{x}_{i1}$, tedy vektory $\vec{x}_{11}, \dots, \vec{x}_{s1}$ jsou vlastní vektory A .
- Pro $j > 1$ platí $A\vec{x}_{ij} = \lambda_i\vec{x}_{ij} + \vec{x}_{i,j-1}$.
- Pro každé $i = 1, \dots, s$ je $V_i = \text{span}\{\vec{x}_{i1}, \dots, \vec{x}_{ik_i}\}$ *invariantní podprostor*. To znamená, že pro každé $\vec{x} \in V_i$ je $A\vec{x} \in V_i$. V důsledku lze operátor A zúžit na V_i a obdržet $A|_{V_i}: V_i \rightarrow V_i$. Posloupnost $\mathcal{X}_i = (\vec{x}_{i1}, \dots, \vec{x}_{ik_i})$ je báze V_i . Máme $[A|_{V_i}]_{\mathcal{X}_i} = \mathbf{J}_{\lambda_i,k_i}$.

Nás především zajímá, zde opět můžeme snadno počítat mocniny zadaného operátoru či matice. To platí, neboť máme vzorec pro mocniny Jordanových buněk: mocnina blokově diagonální matice se počítá snadno:

$$\mathbf{J}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\lambda_1,k_1}^m & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_{\lambda_2,k_2}^m & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{J}_{\lambda_s,k_s}^m \end{pmatrix}$$

Nakonec ještě interpretujme, jak moc se diagonální tvar matice liší od Jordanovského. Výše jsme pozorovali, že jednotlivé Jordanovy buňky lze zapsat jako

⁴⁷ Říkám to nepořádně, vidíte? Měl bych říct, co jsou to ty a a b . Binomickou větu možná znáte pro čísla, ale zde ji budeme využívat pro matice. Binomická věta nevyužívá nic než dvě algebraické operace sčítání a násobení, takže bude platit pro libovolné prvky a, b libovolného okruhu. Důležitým předpokladem však je, že tyto dva prvky musejí komutovat. Zde ji používáme pro okruh matic.

součet $\lambda \mathbf{E} + \mathbf{N}$, kde $\mathbf{N}$ je nilpotentní matice. Důsledkem Jordanova rozkladu je tedy následující tvrzení:

11.47 Důsledek. Každá komplexní matice se dá napsat jako součet diagonalizovatelné matice a nilpotentní matice.

12 Skalární součin

Motivací pro tuto kapitolu je zavést pojem *vzdálenosti* a *úhlu*. Uvidíme, že především pojem *kolmosti* bude extrémně užitečným i v případech, kdy nás jinak žádné úhly moc nezajímají. Rozmysleme si nejprve, jak lze tyto charakteristiky počítat v $\mathbb{R}^2$.

12.1 Pozorování. Necht $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ reprezentují body či vektory v (běžné Eukleidovské) rovině.

- *Délka* vektoru $\vec{x}$ lze spočítat z Pythagorovy věty jako $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
- *Vzdálenost* bodů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lze spočítat tak, že sestrojíme vektor tyto body spojující $\vec{y} - \vec{x}$ a změříme jeho délku $d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.
- Pro měření úhlů nejprve pozorujme, že je-li α úhel, který svírá vektor $\vec{x}$ s kladnou poloosou x , pak je $\cos \alpha = x_1/|\vec{x}|$, $\sin \alpha = x_2/|\vec{x}|$.
- *Úhel* γ jenž svírají vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lze nyní charakterizovat podobným trikem jako vzdálenost. Nejprve můžeme normovat vektor $\vec{y}$ jeho vzdáleností a otočit ho v záporném směru o úhel α , jenž $\vec{x}$ svírá s osou x . Nakonec stačí změřit úhel, jenž výsledný vektor svírá s osou x .

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1/|\vec{y}| \\ y_2/|\vec{y}| \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{x}||\vec{y}|} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{x}||\vec{y}|} \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$\cos \gamma = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{|\vec{x}||\vec{y}|}, \quad \sin \gamma = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

Ze střední školy patrně budete znát pojem *skalárního součinu* $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$, jenž pro charakterizaci úhlu a vzdálenosti můžeme použít

$$\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}, \quad |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

V $\mathbb{R}^3$ můžeme definovat analogickým vzorcem $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ a charakterizace úhlů a vzdáleností bude fungovat úplně stejně. Mohli bychom se tedy nyní zaměřit pouze na $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ a pro tyto speciální lineární prostory zkoumat tyto nově zavedené pojmy. Zdá se totiž, že pojmy délky a úhlů jsou velmi úzce spjatý s tím opravdovským prostorem, ve kterém žijeme. Neměli jsme nikdy možnost zavítat do více než třírozměrného prostoru a ověřit, zda v něm platí zákonitosti Eukleidovské geometrie. Einsteinova teorie relativity pracuje s čtyřrozměrným časoprostorem, ale v něm se vzdálenost měří jinak! Nyní ukážeme, že pojem vzdálenosti je užitečný i pro „nefyzikální“ vektory:

12.2 Motivace (Chyba měření). Necht $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor nějakých naměřených nebo vypočítaných hodnot čehokoliv, necht $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je jiný vektor, se kterým bychom naše hodnoty chtěli porovnat (dejme tomu třeba dlouhodobý průměr). Snadno spočítáme rozdíl $\vec{x} - \vec{y}$. Co když ale chceme rozdíl charakterizovat jediným číslem? Nabízí se možnost spočítat *střední kvadratickou odchylku*

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2.$$

Jedná se o přesně stejný vzorec, jaký jsme měli pro vzdálenost dvou vektorů v $\mathbb{R}^2$. Dostaneme $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$ pro $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

Naměřená série hodnot může být rovněž nějaký časový signál, tedy hodnoty funkce v předepsaných bodech. V praxi budeme mít vskutku vždy nějaký konečný počet hodnot, ale pro teoretické úvahy je vhodné umět pracovat se vzdáleností dvou funkcí. Pro $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme jejich střední kvadratickou odchylku jako

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b (f - g)^2.$$

Tento pojem je opět *indukován* skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f g = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Druhý příklad ukazuje, že zavést skalární součin prostě konkrétním vzorcem již nemusí být nejrozumnější nápad.

12.3 Motivace (Váhy, změna souřadnic, polynomy). Jiný důvod, proč skalární součin nedefinovat prostě jedním vzorečkem je ten, že můžeme chtít dát některým měřením či veličinám větší váhu, protože jsou (veličiny) důležitější nebo se (měření) dají provést přesněji. Necht $\vec{x}$ je již nějaký chybový vektor. Náš vyhodnocovač přesnosti z něj pak udělá jediné číslo podle pravidla $\|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^n w_i x_i^2$, kde $w_i > 0$ jsou nějaké *váhy*.

Dejme tomu nyní, že měříme polohu dvou částic $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ale ve skutečnosti nás jejich absolutní poloha moc nezajímá. Spíš nás zajímá poloha jejich těžiště $y_1 = (x_1 + x_2)/2$ a jejich vzájemná vzdálenost $y_2 = x_2 - x_1$. Dejme tomu, že oboje je stejně důležité. Náš vyhodnocovač přesnosti by pak pro zadaný chybový vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ měl vyplivnout číslo

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = \frac{5}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 - \frac{3}{2}x_1 x_2.$$

Jiný příklad: Uvažujme polynomiální funkce na intervalu $[0, 1]$. Dejme tomu, že $q(x) - p(x) = \alpha + \beta x$. Potom střední kvadratická odchylka p a q není $\alpha^2 + \beta^2$, nýbrž

$$\int_0^1 (\alpha + \beta x)^2 dx = \alpha^2 + \alpha\beta + \frac{1}{3}\beta^3.$$

12.1 Základní pojmy

12.4 Definice. Necht L je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\langle \bullet | \bullet \rangle: L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme **skalární součin**, jestliže

1. je *symetrické*: pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí $\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$,
2. je *lineární ve 2. argumentu*: pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ a $\alpha \in \mathbb{F}$ platí $\langle \vec{x} | \alpha \vec{y} + \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$,
3. je *pozitivně definitní*: pro každé $\vec{x} \in L$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle > 0$.

Číslo $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \geq 0$ nazýváme **norma** vektoru $x \in L$. Dvojici $(L, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ říkáme **lineární prostor se skalárním součinem**.⁴⁸

12.5 Poznámky.

- Ze symetrie plyne automaticky linearita v prvním argumentu. Skalární součin je tedy *bilinéární*.
- Nad obecným tělesem $\mathbb{F}$ lze zkoumat *bilinéární symetrické formy*, tj. zobrazení $L \times L \rightarrow \mathbb{F}$ splňující první dva axiomy. Aby měl smysl poslední axiom, potřebujeme na tělese mít uspořádání. To v obecném tělese nemusí jít zavést. Součin $\langle x | x \rangle$ bude mít navíc význam *normy* (délky), má tedy smysl chtít, aby to bylo reálné číslo.
- Takto formulovaná definice by neměla smysl ani nad $\mathbb{C}$.⁴⁹ Komplexní lineární prostory se skalárním součinem jsou ale velmi důležité. V takovém případě se modifikuje první vlastnost, kde místo symetrie požadujeme, aby byl skalární součin *hermitovský* $\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}$. Potom však nedostáváme v prvním argumentu linearitu, ale *antilinearitu*: $\langle \alpha \vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \bar{\alpha} \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$. Dohromady se antilinearitě v prvním a linearitě ve druhém argumentu říká *seskvilinearita*. Některé autorky používají opačnou definici, kdy je komplexní skalární součin lineární v prvním a antilineární ve druhém argumentu. Definici reálného skalárního součinu lze považovat za speciální případ definice pro komplexní prostory, neboť pro reálná čísla platí $\bar{x} = x$.

12.6 Příklady.

- Pro $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme **standardní skalární součin** jako

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

kde x_i a y_i označují jednotlivé složky vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Prostor $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem se nazývá **Eukleidovský prostor**.

⁴⁸ Rovněž můžete někdy slyšet pojem *Hilbertův prostor*. Používá se především pro lineární prostory nekonečné dimenze, kde se k uvedeným axiomům přidává ještě axiom tzv. *úplnosti*. Pro konečněrozměrné prostory je tento dodatečný požadavek splněn automaticky.

⁴⁹ Na tělese $\mathbb{C}$ opět nemáme uspořádání. Máme-li $z \in \mathbb{C}$, pak se pod značkou $z > 0$ obvykle myslí, že z je reálné kladné. Pokud bychom měli $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle > 0$ pro nějaké $\vec{x} \in L$ nad $\mathbb{C}$, pak může $\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle$ nabývat libovolné komplexní hodnoty vhodnou volbou $\vec{y} = \alpha \vec{x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Jestliže $w_1, \dots, w_n > 0$, pak můžeme výše uvedenou definici modifikovat následujícím způsobem:

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \dots + w_n x_n y_n,$$

- Necht $C(I)$ je lineární prostor všech spojitých funkcí na intervalu I . Potom následující vzorec definuje skalární součin na $C(I)$

$$\langle f | g \rangle = \int_I f g$$

12.7 Věta (Cauchyho–Schwarzova⁵⁰ nerovnost). Necht L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem. Pak pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je posloupnost $(\vec{x}, \vec{y})$ lineárně závislá.

Důkaz. Necht $\vec{y} = \alpha \vec{x}$. Potom

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| = |\alpha| \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = |\alpha| \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Ze symetrie totéž platí pro $\vec{x} = \alpha \vec{y}$.

Necht je nyní posloupnost $(\vec{x}, \vec{y})$ lineárně nezávislá. To znamená, že $\vec{x} - \alpha \vec{y} \neq 0$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$. Tím pádem

$$0 < \|\vec{x} - \alpha \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \alpha \vec{y} | \vec{x} - \alpha \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \alpha^2 \|\vec{y}\|^2 - 2\alpha \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle.$$

Pro $\alpha = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle / \|\vec{y}\|^2$ dostáváme

$$0 < \|\vec{x}\|^2 + \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2} - 2 \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2},$$

z čehož po vynásobení $\|\vec{y}\|^2$ dostáváme žádanou nerovnost. □

12.8 Příklady.

- Cauchyho nerovnost v $\mathbb{R}^n$ říká, že pro libovolné n -tice čísel $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ platí

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

- Necht $a, b \in \mathbb{R}$ a $f, g \in C([a, b])$. Potom

$$\int_a^b f g \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$$

⁵⁰ Toto je nejběžnější z názvů dané nerovnosti. Občas se jí říká prostě jen Cauchyho nerovnost nebo jen Schwarzova nerovnost. V ruský psané literatuře jde o rovnost Cauchy–Buňakovského. **Augustin-Louis Cauchy** ji v roce 1821 dokázal v $\mathbb{R}^n$. Verze pro integrály se poprvé objevila v roce 1859 v práci **Viktora Buňakovského**. Nezávisle na něm ji pak roku 1888 použil **Hermann Schwarz**.

12.9 Definice. Necht L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem. Pro nenulové $\vec{x}, \vec{y} \in L$ definujeme **úhel**, který svírají, jako

$$\arccos \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Řekneme, že $\vec{x}, \vec{y} \in L$ jsou vzájemně **ortogonální** nebo **kolmé**, jestliže $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$.

12.10 Věta (Vlastnosti normy). Necht L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem. Potom platí následující tvrzení.

1. Norma je *pozitivně definitní*: Pro každé $\vec{x} \in L$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\|\vec{x}\| > 0$.
2. Norma je *absolutně homogenní*: Pro každé $\vec{x} \in L$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$.
3. Norma je *subaditivní*: Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí *trojúhelníková nerovnost*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

4. Norma splňuje *rovnoběžníkovou rovnost*: Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

Důkaz. Vlastnost číslo jedna je přímo jeden z axiomů skalárního součinu. Druhá vlastnost plyne snadno z jeho bilinearity. K důkazu třetí použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost.

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

Dokázat čtvrtou vlastnost je cvičení. □

12.11 Poznámky.

- Název pro rovnoběžníkovou rovnost je založen na tom, že nalevo máme vektory odpovídající úhlopříčkám rovnoběžníka, jeho strany jsou určeny vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.
- Lze ukázat, že máme-li lineární prostor L nad $\mathbb{R}$, pak pro každé zobrazení $\|\bullet\|: L \rightarrow \mathbb{R}$ splňující výše uvedenou čtveřici vlastností existuje skalární součin $\langle \bullet | \bullet \rangle$ takový, že $\|x\| = \langle x | x \rangle$. Daný skalární součin se zavede pomocí tzv. *polarizační identity* $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$.
- Uvedené vlastnosti tedy umožňují postupovat naopak: začít s normou, jenž splňuje čtyři axiomy, a příslušný skalární součin zkonstruovat. Mezi axiomy normy se však obvykle ten čtvrtý neuvádí. To pak znamená, že existují normy, které nejsou dané žádným skalárním součinem. Pojem normy je tedy obecně *slabší* než pojem skalárního součinu.
- Norma umožňuje zavést pojem *vzdálenosti* neboli *metriky* $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|$. Metrika je opět pojem, který lze zavést axiomaticky (nejen na lineárních prostorech) a je pak ještě slabší než norma.

- Máme-li pojem vzdálenosti a velikosti, můžeme hovořit o *konvergenci* neboli *topologii*, která lze opět zavést axiomaticky ještě slabším způsobem než metrika. V normovaných prostorech říkáme, že posloupnost $(\vec{x}_n)$ konverguje k vektoru $\vec{y}$, jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{y} - \vec{x}_n\| = 0$. Na konečněrozměrných prostorech není třeba zavádět konvergenci tímto způsobem, neboť se ukazuje, že konvergence podle libovolné normy je ekvivalentní konvergenci po složkách. Naopak na prostorech nekonečné dimenze je to velmi důležité. Například bodová konvergence funkcí vůbec není metrizable a nebyla by kompatibilní se žádnou strukturou normovaného prostoru.⁵¹

12.12 Příklad. Vratme se k motivaci 12.2 sledování chyby měření. Střední kvadratická odchylka $\|\vec{x} - \vec{y}\| = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$ dává větší váhu těm bodům, u kterých je větší chyba. To může a nemusí být žádoucí. Možná chceme jednotlivé chyby prostě sečíst a definovat⁵²

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Možná naopak chceme mít omezení pro maximální chybu⁵³

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Obě charakteristiky definují *normu* ve smyslu splnění vlastností 1.–3. věty 12.10. Ovšem ani jedna z nich nesplňuje rovnoběžníkovou rovnost. To znamená, že neexistuje skalární součin na $\mathbb{R}^n$, jenž by tuto normu indukoval. Jsou však velmi užitečné, setkáte se s nimi třeba v numerické matematice (opět předmět DRN).

12.2 Skalární součiny v $\mathbb{R}^n$

V $\mathbb{R}^n$ již známe *standardní* skalární součin. Skalární součin jsme však definovali axiomaticky a naznačili jsme, že definici mohou splňovat i jiná zobrazení. Zajímavou otázkou tedy je, jak obecně může vypadat skalární součin nad $\mathbb{R}^n$. Budeme postupovat stejně jako při studiu lineárních zobrazení. Označme $g_{ij} = \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle$. Potom pro libovolné

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$$

platí

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij}.$$

Skalární součin je tedy jednoznačně určen sadou čísel a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Pokud čísla naskládáme do matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, můžeme skalární součin vyjádřit pomocí maticového násobení jako $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{y}$.

⁵¹ Čistě pro zajímavost: Uvažujme otevřený interval $(0, 1)$ a posloupnost funkcí (f_n) , které jsou definované takto. $f_n(x) = \sqrt{n}$ pro $x < 1/n$ a $f_n(x) = 0$ pro $x \geq 1/n$. Je zřejmé, že $f_n(x) \rightarrow 0$ pro každé $x \in (0, 1)$. Ovšem střední kvadratická odchylka f_n od nulové funkce nekonverguje k nule: $\|f_n\|^2 = \int_0^{1/n} n \, dx = 1$.

⁵² Výhoda rovněž je, že by se taková norma snadněji počítala.

⁵³ To by se počítalo ještě snadněji.

Nyní zbývá zodpovědět opačnou otázku. Předepíšeme-li matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, určuje vždy předpis $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{y}$ skalární součin? Maticové násobení je lineární, tedy první vlastnost by měla být splněna. Druhé dvě však již automaticky splněné nebudou.

12.13 Definice. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nazývá **symetrická**, jestliže $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tedy $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

12.14 Definice. Symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} > 0$.

12.15 Věta. Pro každou pozitivně definitní matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definuje následující předpis

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{y}$$

skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Naopak pro libovolný skalární součin na $\mathbb{R}^n$ existuje pozitivně definitní matice G taková, že lze skalární součin vyjádřit výše uvedeným způsobem.

Důkaz. Výše uvedený vzorec pro danou matici $\mathbf{A}$ určitě definuje bilineární formu (ukážeme linearitu pouze ve druhém argumentu, což nám stačí, ale snadno ověříte, že je lineární i v prvním)

$$\langle \vec{x} | \alpha \vec{y} + \vec{z} \rangle = \vec{x}^T \mathbf{A} (\alpha \vec{y} + \vec{z}) = \alpha \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{y} + \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{z} = \alpha \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle.$$

Tato bilineární forma je symetrická právě tehdy, když je $\mathbf{A}$ symetrická. Je-li totiž $\mathbf{A}$ symetrická, pak

$$\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle = \vec{y}^T \mathbf{A} \vec{x} = (\vec{y}^T \mathbf{A} \vec{x})^T = \vec{x}^T \mathbf{A}^T \vec{y} = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{y} = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle,$$

kde ve druhé rovnosti jsme využili, že každá matice 1×1 je transpozicí sebe samé. Naopak je-li daná bilineární forma symetrická, pak $\mathbf{A}_{ij} = \langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_j | \vec{e}_i \rangle = \mathbf{A}_{ji}$.

Nakonec zjevně platí, že je daná bilineární forma je navíc pozitivně definitní právě tehdy, když je G pozitivně definitní.

Že je každý skalární součin tohoto tvaru jsme již dokázali výše. □

12.16 Poznámka. Jak jsme viděli a ještě uvidíme, v kapitole o skalárním součinu teprve přijde pořádně ke slovu operace transpozice matice. Zdůrazněme, že vše, co tu budeme formulovat platí pouze nad $\mathbb{R}$. Jak jsme však zmínili, skalární součiny nad $\mathbb{C}$ mohou rovněž být velmi užitečné. V takovém případě musíme místo transpozice používat tzv. *hermitovské*⁵⁴ *sdrůžení*, které matici transponuje a zároveň její prvky komplexně sdruží $\mathbf{B}_{ij} = \overline{\mathbf{A}_{ji}}$. Značení pro tuto operaci může být různé, nejčastěji se používá $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ nebo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\dagger$ (zejména ve fyzikální literatuře), občas i $\mathbf{B} = \mathbf{A}^H$.

12.17 Poznámky (Standardní skalární součin a lineární formy na $\mathbb{R}^n$).

- Standardní skalární součin lze tedy speciálně počítat jako $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$.
- Proces transpozice udělá ze sloupcového vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ matici s jedním řádkem $\vec{x}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Ta představuje lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Lineárním zobrazením

⁵⁴ Charles Hermite, 1822–1901, francouzský matematik.

do tělesa se říká *lineární formy* či *lineární funkcionály*. Pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tedy máme lineární formu $\varphi_{\vec{x}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zobrazující $\varphi_{\vec{x}}(\vec{y}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

- Naopak každou lineární formu $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ můžeme reprezentovat maticí $[\varphi]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, která má jeden řádek. Její transpozice je tedy vektor $\vec{x}_{\varphi} = [\varphi]_{\mathcal{E}}^T \in \mathbb{R}^n$ a platí $\varphi(\vec{y}) = \langle \vec{x}_{\varphi} | \vec{y} \rangle$. Transpozice tedy ustanovuje vzájemně jednoznačný vztah mezi vektory a lineárními formami na $\mathbb{R}^n$.
- Speciálně pro vektory kanonické báze máme $\langle e_i | \vec{y} \rangle = y_i$. Příslušná lineární forma tedy vrací i -tou souřadnici zadaného vektoru.

12.18 Cvičení. Dokažte, že výše uvedená korespondence platí obecněji. Nechť L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze se skalárním součinem. Potom pro každou lineární formu $\varphi: L \rightarrow \mathbb{R}$ existuje vektor $\vec{x} \in L$ takový, že $\varphi(\vec{y}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$. Variantě tohoto tvrzení, která platí i pro nekonečněrozměrné prostory se říká *Rieszova věta*.

Nyní připomeňme odstavce 12.3, kde jsme uvedli motivaci pro zavedení obecného skalárního součinu na základě změny souřadnic. Uvažujme standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ a necht' $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je nějaká báze v $\mathbb{R}^n$ a označme $\mathbf{T} = [\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}} = (\vec{x}_1 \ \dots \ \vec{x}_n)$ příslušnou matici přechodu. Uvažujme dále vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$[\vec{v}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$[\vec{w}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Potom

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \vec{v}^T \vec{w} = [\vec{v}]_{\mathcal{X}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} [\vec{w}]_{\mathcal{X}}.$$

Po změně souřadnic je tedy skalární součin dán maticí $\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$.

12.19 Věta. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$.

Důkaz. Implikaci ($\Leftarrow$) jsme právě dokázali. Implikace ($\Rightarrow$) bude jasná až pomocí Gramova–Schmidtova ortogonalizačního procesu ukážeme, že každý skalární součin je tohoto typu. $\square$