

Cvičení 1

Značení

Na přednášce definujeme *vektory* a *vektorové* neboli *lineární* prostory poměrně abstraktním způsobem. Nejprve však nebude špatné pochopit, o čem se jedná na praktických příkladech. Definujeme následující množiny:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} && \text{množina } n\text{-tic reálných čísel} \\ \mathbb{F}^n &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F} \right\} && \text{množina } n\text{-tic čísel z } \mathbb{F}, (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots) \\ \mathbb{R}[x] &= \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \} && \text{množina všech polynomů s koeficienty v } \mathbb{R} \\ \mathbb{F}[x] &= \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mid n \in \mathbb{N}_0, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \} && \text{množina všech polynomů s koeficienty v } \mathbb{F}\end{aligned}$$

Poznámka. Z analytické geometrie na střední škole jste možná zvyklí např. v rovině rozlišovat *body* $A = [x, y]$ a *vektory* $\vec{v} = (x, y)$. Pro nás bude oboje prostě element $\mathbb{R}^2$ a oboje budeme značit stejným způsobem – jako sloupeček $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Může to být poněkud matoucí, ale má to zase své praktické výhody.

Pár motivačních příkladů

Cvičení 1.1. Připomeňte si, jak funguje sčítání a odčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Totéž si připomeňte pro polynomy. Spočítejte

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{c) } 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{d) } (2 + 3x - x^2) + (1 - x) & \text{e) } (2 + 5x) - (-1 + 3x) & \text{f) } 5(-1 + 2x) \end{array}$$

Cvičení 1.2. Najděte parametrické vyjádření roviny $x - 2z = -1$.

Cvičení 1.3. Najděte průnik přímky

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

s rovinou z předchozího cvičení.

Vektory tedy umíme mezi sebou sčítat a umíme je násobit čísly. Dohromady těmito dvěma operacím říkáme *lineární kombinace*. Zkusme tento pojem formulovat pomocí formální definice.

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Uvažujme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in L$ a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Vektor $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$ nazveme **lineární kombinace** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Číslům $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ říkáme **koeficienty** této lineární kombinace.

Cvičení 1.4. Napište polynom $p(x) = -8x^2 - 5x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ jako lineární kombinaci (nad $\mathbb{R}$) polynomů

$$\begin{array}{l} \text{a) } e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2, \\ \text{b) } f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = 2x - 5, f_3(x) = -x^2 - x + 1. \end{array}$$

Soustavy lineárních rovnic

Jak jsme mohli vidět, většina problémů v lineární algebře povede na soustavu lineárních rovnic. Nyní se proto naučíme soustavy řešit efektivně. Později se tento algoritmus známý jako **Gaussova eliminace** formalizuje na přednášce.

Cvičení 1.5. Vyřešte následující soustavu (v $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 2 \\ y + z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Onen příhodný tvar soustavy z cvičení výše, kde v každém následujícím řádku ubude zleva alespoň jedna proměnná, budeme nazývat **horní stupňovitý tvar**

Cvičení 1.6. Vyřešte následující soustavu převodem na horní stupňovitý tvar.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

Tvrzení. Následující **ekvivalentní řádkové úpravy** nemění množinu řešení soustavy:

1. prohození dvou řádků,
2. vynásobení řádku nenulovým číslem,
3. přičtení násobku jednoho řádku k druhému.

Pozor, je poněkud ošemetné pokoušet se provádět více úprav naráz! Zkušený řešič či zkušená řešička to jistě zvládne, ale je potřeba postupovat obezřetně. Jinak se člověku všechno navzájem vyruší a ze soustavy nezbude nic.

Cvičení 1.7. Převeďte následující soustavy do maticového tvaru a vyřešte převodem na horní stupňovitý tvar pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

$$\text{a) } \begin{cases} \alpha - \gamma = -8 \\ 2\beta - \gamma = -5 \\ \alpha - 5\beta + \gamma = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x - z = 1 \end{cases}$$

Řešení

1. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, d) $3 + 2x - x^2$, e) $(3 + 2x)$, f) $(-5 + 10x)$
2. $x = 2s - 1$, $y = r$, $z = s$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
4. a) $p(x) = 2e_1(x) - 5e_2(x) - 8e_3(x)$,
b) $p(x) = -3f_1(x) + 5f_3(x)$
5. $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$
6. $x = 2$, $y = -1$
7. a) $\alpha = -3$, $\beta = 0$, $\gamma = 5$; b) $x = 2$,
 $y = 1$, $z = -3$