

Cvičení 2

Nejprve se ještě vrátíme k soustavám.

Cvičení 2.1. Najděte všechna řešení následujících soustav lineárních rovnic.

a) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Lineární podprostor

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Neprázdná množina $V \subset L$ se nazývá **lineární podprostor**, jestliže je uzavřená na operace lineárního prostoru. To znamená, že pro každou dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $\vec{x} + \vec{y} \in V$ a pro každý skalár $\alpha \in \mathbb{F}$ a vektor $\vec{x} \in V$ je $\alpha\vec{x} \in V$.

Tvrzení. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ a necht V je jeho lineární podprostor. Potom $\vec{0} \in V$.

Tvrzení. Podmnožina $V \subseteq L$ je lineární podprostor právě tehdy, když pro každou dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a každý skalár $\alpha \in \mathbb{F}$ je $\alpha\vec{x} + \vec{y} \in V$.

Poznámka. V naší paletě lineárních prostorů nad $\mathbb{F}$ máme zatím jen $\mathbb{F}^n$ a $\mathbb{F}[x]$. Nyní do ní můžeme přidat ještě všechny jejich podprostory.

Cvičení 2.2. Rozhodněte, zda je následující množina $M \subset \mathbb{R}^2$ lineární podprostor $\mathbb{R}^2$

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

b) $M = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

Cvičení 2.3. Rozhodněte, které z řešení soustav z prvního cvičení tvoří lineární podprostor $\mathbb{R}^2$.

Cvičení 2.4. Označme $\mathcal{F}(T) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x)\}$ množinu všech periodických funkcí s periodou T . Dokažte, že $\mathcal{F}(T)$ je lineární podprostor prostoru všech funkcí $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Uvažujme vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Definujeme jejich **lineární obal** jako

$$\text{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} = \{\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Poznámka. Na přednášce definujeme lineární obal trochu obecněji i pro nekonečné množiny. K této definici by bylo vhodné zdůvodnit, proč je to tzv. *dobrá definice* (viz přednáška).

Tvrzení. Lineární obal je vždy lineární podprostor.

Cvičení 2.5. Uvažujme následující trojici vektorů

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, kde

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Definice. Posloupnost vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ nazveme **lineárně nezávislou**, jestliže rovnost $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$ implikuje $\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$. V opačném případě je tato množina **lineárně závislá**.

Řešení

1. a) $x = 2t - 1, y = t$; b) $\emptyset$; c) $x = 2t, y = t$

2. ne, ano, ne
3. ne, ne, ano

5. ano, ano, ne