

Cvičení 5

Lineární zobrazení

Definice. Buďte V, W lineární prostory nad tělesem $\mathbb{F}$. Zobrazení $A: V \rightarrow W$ se nazývá **lineární**, jestliže je

- *aditivní*, tj. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V) A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ a
- *homogenní*, tj. $(\forall \alpha \in \mathbb{F}) (\forall \vec{x} \in V) A(\alpha \vec{x}) = \alpha A\vec{x}$.

Finta. Stačí ověřit, že pro každé $\alpha \in \mathbb{F}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha A\vec{x} + A\vec{y}$.

Cvičení 5.1. Určete, které z následujících zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineární.

- a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$ c) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$
d) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y+2 \end{pmatrix}$ e) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$ f) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Poznámka. Ze střední školy znáte pojem *lineární funkce* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, což byla funkce daná předpisem $f(x) = ax + b$. Tyto funkce u nás *nebudeme považovat za lineární*, pokud neplatí $b = 0$.

Pozorování. Je-li $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V , pak je libovolné lineární zobrazení $A: V \rightarrow W$ jednoznačně určené svojí akcí na bázi $A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n$. Vskutku: chceme-li znát obraz libovolného $\vec{y} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$, stačí spočítat $A\vec{y} = \alpha_1 A\vec{x}_1 + \dots + \alpha_n A\vec{x}_n$.

Lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ je tak určené maticí $[A] = (A\vec{e}_1 \cdots A\vec{e}_n)$ s s sloupčů a r řádků.

Cvičení 5.2. Určete matice lineárních zobrazení z předchozího cvičení.

Cvičení 5.3. Popište slovy následující lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pro vizualizaci můžete využít web shad.io/MatVis

- a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cvičení 5.4. Najděte matici zrcadlení podél přímky $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Cvičení 5.5. Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Určete, jak matice působí na obecný vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- b) Najděte všechna řešení rovnice $\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- c) Rozhodněte, zda daná množina řešení tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, jaká je jeho dimenze?
- d) Uvažujme lineární obal sloupečků matice $\mathbf{A}$, tj. $V := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Najděte bázi V a určete dimenzi V .

Definice. Buď $A: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Definujeme **jádro** tohoto zobrazení jako

$$\ker A = \{ \vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \vec{0} \}.$$

Platí, že jádro je vždy lineární podprostor $\ker A \subseteq V$. Dimenze jádra jako vektorového prostoru se nazývá **defekt** zobrazení A ; značíme $\text{def } A = \dim \ker A$.

Definice. Buď $A: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Definujeme **obraz** tohoto zobrazení jako

$$\operatorname{im} A = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in V\}.$$

Platí, že obraz je vždy lineární podprostor $\operatorname{im} A \subset W$. Dimenze obrazu jako vektorového prostoru se nazývá **hodnost** zobrazení A ; značíme $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{im} A$.

Cvičení 5.6. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete, jak toto zobrazení působí na obecný vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b) Najděte jádro a defekt zobrazení $\mathbf{A}$.

c) Najděte obraz a hodnost zobrazení $\mathbf{A}$.

Řešení

1. ano, ne, ano, ne, ne, ano

2. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. roztažení $2\times$ ve směru x ; zko-
sení osy y ; otočení o 45° a záro-
veň dvojnásobné zvětšení; průmět
na osu x ; průmět na osu $x = y$;
zrcadlení podle osy y

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} x+2y-z \\ -y-z \\ x-3z \\ x+3y \end{pmatrix}; \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \text{ano};$
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right), 2$

6. $\mathbf{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} x+2y-2z-u \\ 2x+4y+z+3u \\ -x-2y-u \end{pmatrix}; \ker \mathbf{A} =$
 $\operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{def} \mathbf{A} = 2;$
 $\operatorname{im} \mathbf{A} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$
 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$