

Cvičení 6

Cvičení 6.1. Uvažujme následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte všechna možná maticová násobení mezi dvojicemi matic, která provést lze. (Tj. rozhodněte, zda lze vynásobit $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{BA}$ a podobně a součin případně skutečně proveďte.) Jakým zobrazením (mezi jakými prostory) jednotlivé matice odpovídají? Jakému zobrazení odpovídá jejich součin?

Matice lineárního zobrazení v bázi

Pozorování. Derivace je lineární zobrazení na lineárním prostoru všech funkcí. Můžeme také zavést derivaci jako lineární operátor $D: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, jenž zobrazuje

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + n\alpha_n x^{n-1}$$

Tento operátor rovněž můžeme zúžit na prostor polynomů stupně nejvýše n a dostat $D: \mathbb{R}^{\leq n}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq n}[x]$.

Cvičení 6.2. Uvažujme operátor derivace $D: \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$

a) Určete, obrazy vektorů kanonické báze $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$

$$e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = x, \quad e_3(x) = x^2.$$

b) Určete souřadnice těchto obrazů opět v kanonické bázi $\mathcal{E} = (e_1(x), e_2(x), e_3(x))$.

c) Najděte bázi obrazu D a určete hodnotu D .

d) Najděte jádro D a určete defekt D .

Definice. Buďte V, W lineární prostory a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r)$ resp. $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s)$ jejich báze. Pro libovolné lineární zobrazení $A: V \rightarrow W$ pak definuji jeho matici bází $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jako

$$[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = ([A(\vec{x}_1)]_{\mathcal{Y}} \dots [A(\vec{x}_r)]_{\mathcal{Y}}).$$

Cvičení 6.3. Najděte matici operátoru derivování $D: \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ v kanonické bázi $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$.

Transformace souřadnic

Cvičení 6.4. Uvažujme lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané maticí

$$[A]_{\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{E}_2$ a $\mathcal{E}_3$ jsou kanonické báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Uvažujme jiné $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Najděte $[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$.

Definice. Buď V lineární prostor a necht $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ jsou jeho báze. Matici

$$[\text{id}_V]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = ([\vec{x}_1]_{\mathcal{Y}} \quad \dots \quad [\vec{x}_n]_{\mathcal{Y}})$$

nazýváme **matice přechodu** či **matice transformace souřadnic** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.

Cvičení 6.5. Najděte $[\text{id}]_{\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{Y}}$ a $[\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}_2}$, kde $\mathcal{E}_2$ a $\mathcal{E}_3$ jsou kanonické báze $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ bereme z předchozího příkladu. Ověřte maticovým násobením, že platí $[A]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} = [\text{id}]_{\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{Y}} [A]_{\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3} [\text{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}_2}$.

Řešení

$$\begin{aligned}
 1. \quad \mathbf{AC} &= \begin{pmatrix} -15 & -6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\
 \mathbf{B}^2 &= \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\
 \mathbf{BD} &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 15 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\
 \mathbf{BE} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\
 \mathbf{CB} &= \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 12 & 9 \\ -14 & -2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\
 \mathbf{CD} &= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 13 & -11 & 27 \\ -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{CE} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\
 \mathbf{DC} &= \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -33 & -11 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\
 \mathbf{EA} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2. \\
 2. \quad \mathbf{D}e_1(x) &= 0, \mathbf{D}e_2(x) = 1, \mathbf{D}e_3(x) = \\
 2x; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \operatorname{im} \mathbf{D} = \\
 \operatorname{span}\{1, x\}, \operatorname{rank} \mathbf{D} &= 2; \operatorname{ker} \mathbf{D} = \\
 \operatorname{span}\{1\}, \operatorname{def} \mathbf{D} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 4. \quad A_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \\
 5. \quad [\operatorname{id}]_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \\
 \operatorname{id}_{\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{Y}} &= \begin{pmatrix} 9 & -5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 17 & -10 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$